Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

SOLUZIONI DEL TUTORATO NUMERO 3 (10 MARZO 2010)
TEOREMA DELLA FUNZIONE IMPLICITA, SPAZI METRICI

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. (a) $F(x,y) = \arctan(x) + e^{-y} - \cos(xy)$ è di classe C^1 in un intorno dell'origine con $F(0,0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -e^{-y} + x\sin(xy)\big|_{(x,y)=(0,0)} = -1 \neq 0$, dunque per il teorema della funzione implicita $\exists r, \rho > 0$ e $g \in C^1(B_r(0), B_\rho(0))$ tale che l'insieme di livello $\{F = 0\}$ è il grafico della funzione g; supponendo $\rho \leq 1$, abbiamo che $|F(x,0)| = |\arctan(x)| \leq |x| \leq r$, dunque posto $T = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)} = -1$, per avere $\sup_{x \in B_r(0)} |F(x,0)| \leq \frac{\rho}{2} = \frac{\rho}{2\|T\|}$ è sufficiente porre $r = \frac{\rho}{2}$; inoltre $\left|1 - T\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right| = \left|1 - e^{-y} + x\sin(xy)\right| \leq$ $\leq \left|1 - e^{-y}\right| + |x||\sin(xy)| \leq 3|-y| + |x| \leq 3\rho + r \leq \frac{7}{2}\rho$, dunque per avere $\sup_{(x,y) \in B_r(0) \times B_\rho(0)} \left|1 - T\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right| \leq \frac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho =$ $= \frac{1}{7}$, e di conseguenza $r = \frac{1}{14}$; per calcolare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di g, notiamo che essendo $\arctan(x) + e^{-g(x)} - \cos(xg(x)) \equiv$ $\equiv 0 \; \forall x \in B_r(0)$, allora $0 = \frac{d}{dx}\left(\arctan(x) + e^{-g(x)} - \cos(xg(x))\right)\Big|_{x=0} =$ $\frac{1}{1+x^2} - g'(x)e^{-g(x)} + (xg'(x) + g(x))\sin(xg(x))\Big|_{x=0} = 1 - g'(0) \Rightarrow$ $\Rightarrow g'(0) = 1$, perché $g(0) = 0$, e analogamente $0 = \frac{d^2}{dx^2}$ $(\arctan(x) +$ $+e^{-g(x)} - \cos(xg(x))\Big)\Big|_{x=0} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} + g'^2(x)e^{-g(x)} - g''(x)e^{-g(x)} +$ $+(2g'(x) + xg''(x))\sin(xg(x)) + (xg'(x) + g(x))^2\cos(xg(x))\big|_{x=0} = 1 -$ $-g''(0) \Rightarrow g''(0) = 1 \Rightarrow g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + o\left(x^2\right) = x +$ $+\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$.

   (b) $F(x,y) = e^{2y} - \sin(x+y) - 1$ è di classe C^1 in un intorno dell'origine con $F(0,0) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 2e^{2y} - \cos(x+y)\big|_{(x,y)=(0,0)} = 1 \neq 0$, dunque per il teorema della funzione implicita $\exists r, \rho > 0$ e $g \in C^1(B_r(0), B_\rho(0))$ tale che l'insieme di livello $\{F = 0\}$ è il grafico della funzione g; supponendo $\rho \leq \frac{1}{2}$, abbiamo che $|F(x,0)| = |\sin(x)| \leq |x| \leq r$, dunque posto $T = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)} = 1$, per avere $\sup_{x \in B_r(0)} |F(x,0)| \leq \frac{\rho}{2} = \frac{\rho}{2\|T\|}$ è sufficiente porre $r = \dfrac{\rho}{2}$; inoltre $\left|1 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right| = \left|1 - 2e^{2y} + \cos(x+\right.$ $\left.+y)\right| \leq \left|2 - 2e^{2y}\right| + |\cos(x+y) - 1| \leq 12|y| + \dfrac{(x+y)^2}{2} \leq 12\rho + \dfrac{r^2}{2} +$ $+\dfrac{\rho^2}{2} + r\rho \leq 12\rho + \dfrac{\rho^2}{8} + \dfrac{\rho^2}{2} + \dfrac{\rho^2}{2} \leq 12\rho + \dfrac{\rho}{8} + \dfrac{\rho}{2} + \dfrac{\rho}{2} = \dfrac{105}{8}\rho$, dunque per avere $\sup\limits_{(x,y)\in B_r(0)\times B_\rho(0)} \left|1 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right| \leq \dfrac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho = \dfrac{4}{105}$, e di conseguenza $r = \dfrac{2}{105}$; per calcolare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di g, notiamo che essendo $e^{2g(x)} - \sin(x+g(x))-$ $-1 \equiv 0\ \forall x \in B_r(0)$, allora $0 = \dfrac{d}{dx}\left(e^{2g(x)} - \sin(x+g(x)) - 1\right)\Big|_{x=0} =$ $= 2g'(x)e^{2g(x)} - (1+g'(x))\cos(x+g(x))\Big|_{x=0} = g'(0) - 1 \Rightarrow g'(0) =$ $= 1$, perché $g(0) = 0$, e analogamente $0 = \dfrac{d^2}{dx^2}\left(e^{2g(x)} - \sin(x+g(x))-\right.$ $\left.-1\right)\big|_{x=0} = 4g'^2(x)e^{2g(x)} + 2g''(x)e^{2g(x)} + (1+g'(x))^2\sin(x+g(x))-$ $-g''(x)\cos(x+g(x))\big|_{x=0} = 4 + g''(0) \Rightarrow g''(0) = -4 \Rightarrow g(x) = g(0)+$ $+g'(0)x + \dfrac{g''(0)}{2}x^2 + o\left(x^2\right) = x + 2x^2 + o\left(x^2\right)$.

(c) $F(x,y) = xy^2 + y + \sin(xy) + \dfrac{e^x - 1 - x}{2}$ in $(0,0)$ è di classe C^1 in un intorno dell'origine con $F(0,0) = 0$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 2xy + 1+$ $+x\cos(xy)|_{(x,y)=(0,0)} = 1 \neq 0$, dunque per il teorema della funzione implicita $\exists r, \rho > 0$ e $g \in C^1(B_r(0), B_\rho(0))$ tale che l'insieme di livello $\{F = 0\}$ è il grafico della funzione g; supponendo $r, \rho \leq 1$, abbiamo che $|F(x,0)| = \left|\dfrac{e^x - 1 - x}{2}\right| \leq \dfrac{|e^x - 1|}{2} + \dfrac{|x|}{2} \leq \dfrac{3}{2}r + \dfrac{r}{2} = 2r$, dunque posto $T = \dfrac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)} = 1$, per avere $\sup\limits_{x\in B_r(0)} |F(x,0)| \leq$ $\leq \dfrac{\rho}{2} = \dfrac{\rho}{2\|T\|}$ è sufficiente porre $r = \dfrac{\rho}{4}$; inoltre $\left|1 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right| \leq |2xy|+$ $+|x\cos(xy)| = 2|xy| + |x||\cos(xy)| \leq 2r\rho + r \leq \dfrac{\rho^2}{2} + \dfrac{\rho}{4} \leq \dfrac{3}{4}\rho$, dunque per avere $\sup\limits_{(x,y)\in B_r(0)\times B_\rho(0)} \left|1 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right| \leq \dfrac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho = \dfrac{2}{3}$, e di conseguenza $r = \dfrac{1}{6}$; per calcolare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di g, notiamo che essendo $xg^2(x) + g(x) + \sin(xg(x))+$ $+\dfrac{e^x - 1 - x}{2} \equiv 0\ \forall x \in B_r(0)$, allora $0 = \dfrac{d}{dx}\left(xg^2(x) + g(x) + \sin(xg(x))+\right.$ $\left.+\dfrac{e^x - 1 - x}{2}\right)\Big|_{x=0} = 2xg'(x)g(x) + g^2(x) + g'(x) + (g(x)+$ $+xg'(x))\cos(xg(x)) + \dfrac{e^x - 1}{2}\Big|_{x=0} = g'(0) \Rightarrow g'(0) = 0$, perché $g(0) =$ $= 0$, e analogamente $0 = \dfrac{d^2}{dx^2}\left(xg^2(x) + g(x) + \sin(xg(x)) + \dfrac{e^x - 1}{2}\right.$

$-\frac{x}{2}\Big)\Big|_{x=0} = 2g(x)g'(x) + 2x\left(g'^2(x) + g(x)g''(x)\right) + 2g(x)g'(x)+$
$+g''(x) + (2g'(x) + xg''(x))\cos(xg(x)) - (g(x) + xg'(x))^2\sin(xg(x))+$
$+\left.\frac{e^x}{2}\right|_{x=0} = g''(0) - \frac{1}{2} \Rightarrow g''(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2+$
$+o\left(x^2\right) = \frac{x^2}{4} + o\left(x^2\right).$

(d) $F(x_1, x_2, y) = y^3 - \cosh(x_1x_2)$ in $(0,0,1)$ è di classe C^1 in un intorno del punto $(0,0,1)$ con $F(0,0,1) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,1) = 3y^2\big|_{(x_1,x_2,y)=(0,0,1)} = = 3 \neq 0$, dunque per il teorema della funzione implicita $\exists r, \rho > 0$ e $g \in C^1(B_r((0,0)), B_\rho(1))$ tale che l'insieme di livello $\{F = 0\}$ è il grafico della funzione g; supponendo $r, \rho \leq 1$, abbiamo che $|F(x_1, x_2, 1)| = = |1 - \cosh(x_1x_2)| = \frac{|e^{x_1x_2} + e^{-x_1x_2} - 1 - 1|}{2} \leq \frac{|e^{x_1x_2} - 1|}{2} + +\frac{|e^{-x_1x_2} - 1|}{2} \leq \frac{3}{2}|x_1x_2| + \frac{3}{2}|x_1x_2| \leq \frac{3}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) \leq \frac{3}{2}r^2 \leq \frac{3}{2}r$, dunque posto $T = = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)} = \frac{1}{3}$, per avere $\sup_{(x_1,x_2)\in B_r((0,0))} |F(x_1,x_2,1)| \leq \frac{\rho}{6} = \frac{\rho}{2\|T\|}$ è sufficiente porre $r = \frac{\rho}{9}$; inoltre $\left|1 - T\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right| = |1 - y^2| = |1- -y||1+y| \leq \rho(1 + |y|) \leq 3\rho$, dunque per avere $\sup_{(x_1,x_2,y)\in B_r((0,0))\times B_\rho(0)} \left|1 - T\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right| \leq \leq \frac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho = \frac{1}{6}$, e di conseguenza $r = \frac{1}{54}$; per calcolare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di g, notiamo che essendo $g^3(x_1,x_2) - \cosh(x_1x_2) \equiv 0\ \forall x \in B_r(0)$, allora $0 = \frac{d}{dx_1}\ \big(g^3(x_1,x_2)-$
$-\cosh(x_1x_2)\big)\big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = 3g^2(x_1,x_2)\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)-$
$-x_2\sinh(x_1x_2)\big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = 3\frac{\partial g}{\partial x_1}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_1}(0,0) = 0$, perché $g(0,0) = 1$, analogamente $0 = \frac{d}{dx_2}\ \left(g^3(x_1,x_2) - \cosh(x_1x_2)\right)\big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$
$= 3g^2(x_1,x_2)\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2) - x_1\sinh(x_1x_2)\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = \frac{\partial g}{\partial x_2}(0,0) \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_1}(0,0) = 0,\ 0 = \frac{d^2}{dx_1^2}\ \left(g^3(x_1,x_2) - \cosh(x_1x_2)\right)\big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$
$= 6g(x_1,x_2)\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)\right)^2 + 3g^2(x_1,x_2)\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(x_1,x_2)-$
$-x_2^2\cosh(x_1x_2)\big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = 3\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(0,0) = 0,\ 0 =$
$= \frac{d^2}{dx_1dx_2}\ \left(g^3(x_1,x_2) - \cosh(x_1x_2)\right)\big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = 3g^2(x_1,x_2)\frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2}(x_1,x_2)+$
$+6g(x_1,x_2)\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2) - x_1x_2\cosh(x_1x_2)-$
$-\sinh(x_1x_2)\big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = -3\frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2}(0,0) = 0$ e

$0 = \frac{d^2}{dx_2^2}\left(g^3(x_1,x_2) - \cosh(x_1x_2)\right)\big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = 6g(x_1,x_2)\left(\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right)^2 +$
$+3g^2(x_1,x_2)\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) - x_1^2\cosh(x_1x_2)\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = 3\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(0,0) \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(0,0) = 0 \Rightarrow g(x_1,x_2) = g(0,0) + \langle \nabla g(0,0),(x_1,x_2)\rangle +$
$+\frac{\langle H_g(0,0)(x_1,x_2),(x_1,x_2)\rangle}{2} + o\left(x_1^2+x_2^2\right) = 1 + o\left(x_1^2+x_2^2\right).$

(e) $F(x_1,x_2,y) = \log(1+x_1x_2y) - \arctan(x_1x_2) + e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)y} - y$ in $(0,0,1)$ è di classe C^1 in un intorno del punto $(0,0,1)$ con $F(0,0,1)=0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0,1) = \frac{x_1x_2}{1+x_1x_2y} - \left(x_1^2+x_2^2\right)e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)y} - 1\Big|_{(x_1,x_2,y)=(0,0,1)} =$ $= -1 \neq 0$, dunque per il teorema della funzione implicita $\exists r,\rho > 0$ e $g \in C^1(B_r((0,0)), B_\rho(1))$ tale che l'insieme di livello $\{F=0\}$ è il grafico della funzione g; supponendo $r,\rho \le 1$, abbiamo che $|F(x_1,x_2,1)| =$ $= \left|\log(1+x_1x_2) + \arctan(x_1x_2) + e^{x_1^2+x_2^2} - 1\right| \le |1+\log(x_1x_2y)| +$ $+|\arctan(x_1x_2)| + \left|e^{x_1^2+x_2^2} - 1\right| \le |2x_1x_2| + \frac{x_1^2+x_2^2}{2} + 3\left(x_1^2+x_2^2\right) \le$ $\le \frac{9}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right) \le \frac{9}{2}r^2$, dunque posto $T = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)} = -1$, per avere $\sup_{(x_1,x_2)\in B_r((0,0))} |F(x_1,x_2,1)| \le \frac{\rho}{2} = \frac{\rho}{2\|T\|}$ è sufficiente porre $r = \frac{\sqrt{\rho}}{9}$; inoltre $\left|1 - T\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right| = \left|\frac{x_1x_2}{1+x_1x_2y} - \left(x_1^2+x_2^2\right)e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)y}\right| \le$ $\le \left|\frac{x_1x_2}{1+x_1x_2y}\right| + \left|\left(x_1^2+x_2^2\right)e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)y}\right| \le \frac{|x_1x_2|}{1-\frac{1}{2}} + 3\left(x_1^2+x_2^2\right) \le$ $\le 4\left(x_1^2+x_2^2\right) = 4r^2 \le \frac{4}{9}\rho$, dunque per avere $\sup_{(x_1,x_2,y)\in B_r(0)\times B_\rho((0,0))} \left|1 - T\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right| \le$ $\le \frac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho = 1 \le \frac{9}{8}$, e di conseguenza $r = \frac{1}{3}$; per calcolare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine di g, notiamo che essendo $\log(1+x_1x_2g(x_1,x_2)) - \arctan(x_1x_2) + e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)g(x_1,x_2)} -$ $-g(x_1,x_2) \equiv 0\ \forall x \in B_r(0)$, allora $0 = \frac{d}{dx_1}\,(\log(1+x_1x_2g(x_1,x_2)) -$ $-\arctan(x_1x_2) + e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)g(x_1,x_2)} - g(x_1,x_2))\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$
$= \frac{x_1x_2\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2) + x_2g(x_1,x_2)}{1+x_1x_2g(x_1,x_2)} - \frac{x_2}{1+x_1^2x_2^2} + \Big(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)\left(x_1^2+\right.$
$\left.+x_2^2\right) + 2x_1g(x_1,x_2)\Big)e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)g(x_1,x_2)} - \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$
$= -\frac{\partial g}{\partial x_1}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_1}(0,0) = 0$, analogamente $0 = \frac{d}{dx_2}\,(\log(1+$ $+x_1x_2g(x_1,x_2)) - \arctan(x_1x_2) + e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)g(x_1,x_2)} - g(x_1,x_2))\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$
$= \frac{x_1x_2\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2) + x_1g(x_1,x_2)}{1+x_1x_2g(x_1,x_2)} - \frac{x_1}{1+x_1^2x_2^2} + \Big(\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)\left(x_1^2+\right.$

$$+x_2^2\right) + 2x_2 g(x_1,x_2)\big)\, e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)g(x_1,x_2)} - \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$$

$$= -\frac{\partial g}{\partial x_2}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_2}(0,0) = 0,\ 0 = \frac{d^2}{dx_1^2}\ (\log(1+x_1x_2g(x_1,x_2)) -$$

$$-\arctan(x_1x_2) + e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)g(x_1,x_2)} - g(x_1,x_2))\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$$

$$= \frac{(1+x_1x_2g(x_1,x_2))\left(2\cdot x_2\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2) + x_1x_2\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(x_1,x_2)\right)}{(1+x_1x_2g(x_1,x_2))^2} -$$

$$-\frac{\left(x_1x_2\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2) + x_2g(x_1,x_2)\right)^2}{(1+x_1x_2g(x_1,x_2))^2} + \frac{2x_1x_2^3}{\left(1+x_1^2x_2^2\right)^2} + \left(\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)\left(x_1^2+\right.\right.\right.$$

$$\left.+x_2^2\right) + 2x_1g(x_1,x_2)\Big)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(x_1,x_2)\left(x_1^2+x_2^2\right) + 2x_1\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2) +$$

$$+2g(x_1,x_2) + 2x_1\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)\Bigg)\, e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)g(x_1,x_2)} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(x_1,x_2)\Bigg|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$$

$$= 2 - \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(0,0) = 2,\ 0 = \frac{d^2}{dx_1dx_2}\ (\log(1+x_1x_2g(x_1,x_2)) -$$

$$-\arctan(x_1x_2) + e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)g(x_1,x_2)} - g(x_1,x_2))\Big|_{(0,0)} =$$

$$= \frac{\left(x_1\frac{\partial g}{\partial x_1} + x_1x_2\frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2} + x_2\frac{\partial g}{\partial x_2} + g(x_1,x_2)\right)(1+x_1x_2g(x_1,x_2))}{(1+x_1x_2g(x_1,x_2))^2} -$$

$$-\frac{\left(x_1x_2\frac{\partial g}{\partial x_1} + x_2g(x_1,x_2)\right)\left(x_1x_2\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2) + x_1g(x_1,x_2)\right)}{(1+x_1x_2g(x_1,x_2))^2} +$$

$$+\frac{x_1^2x_2^2-1}{\left(1+x_1^2x_2^2\right)^2} + \left(\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_1\partial x_2}(x_1,x_2)\left(x_1^2+x_2^2\right) + 2x_2\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2) +\right.\right.$$

$$\left.+2x_1\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)\left(x_1^2+x_2^2\right) + 2x_1g(x_1,x_2)\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)\left(x_1^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+x_2^2\right) + 2x_2g(x_1,x_2)\right)\right)\, e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)g(x_1,x_2)} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_1x_2}(x_1,x_2)\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$$

$$= -\frac{\partial^2 g}{\partial x_1x_2}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x_1x_2}(0,0) = 0 \text{ e } 0 = \frac{d^2}{dx_2^2}\ (\log(1+x_1x_2g(x_1,x_2)) -$$

$$\arctan(x_1x_2) + e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)g(x_1,x_2)} - g(x_1,x_2))\Big|_{(x_1,x_2)=(0,0)} =$$

$$= \frac{(1+x_1x_2g(x_1,x_2))\left(2x_1\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2) + x_1x_2\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(x_1,x_2)\right)}{(1+x_1x_2g(x_1,x_2))^2} -$$

$$-\frac{\left(x_1x_2\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2) + x_1g(x_1,x_2)\right)^2}{(1+x_1x_2g(x_1,x_2))^2} + \frac{2x_1^3x_2}{\left(1+x_1^2x_2^2\right)^2} + \left(\left(\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)\left(x_1^2+\right.\right.\right.$$

$$\left.+x_2^2\right) + 2x_2g(x_1,x_2)\Big)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(x_1,x_2)\left(x_1^2+\right.$$

$$\left.+x_2^2\right) + 2x_2\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2) + 2g(x_1,x_2) + 2x_2\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)\Bigg)\, e^{\left(x_1^2+x_2^2\right)g(x_1,x_2)} -$$

$$-\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(x_1,x_2)\Bigg|_{(x_1,x_2)=(0,0)} = 2 - \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(0,0) = 2 \Rightarrow g(x_1,x_2) =$$

$$= g(0,0) + \langle \nabla g(0,0), (x_1,x_2)\rangle + \frac{\langle H_g(0,0)(x_1,x_2), (x_1,x_2)\rangle}{2} + o\left(x_1^2+\right.$$

$+x_2^2\big) = 1 + x_1^2 + x_2^2 + o\left(x_1^2 + x_2^2\right)$.

2. $F(x, y_1, y_2) = \left(\dfrac{x + y_2}{1 + x + y_1^2}, \dfrac{x + y_1}{1 + x + y_2^2}\right)$.

   (a) F è di classe C^1 in un intorno dell'origine, inoltre $F(0,0,0) = (0,0)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0,0) = \left|\left(\begin{array}{cc} \frac{-2y_1(x+y_2)}{\left(1+x+y_1^2\right)^2} & \frac{1}{1+x+y_1^2} \\ \frac{1}{1+x+y_2^2} & \frac{-2y_2(x+y_1)}{\left(1+x+y_2^2\right)^2} \end{array}\right)\right|_{(x,y_1,y_2)=(0,0,0)} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)$ è invertibile (con $T = \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)$), dunque per il teorema della funzione implicita $\exists r, \rho > 0$ e $g \in C^1(B_r(0), B_\rho((0,0)))$ tale che $F(x, g_1(x), g_2(x)) \equiv 0\ \forall x \in B_r(0)$.

   (b) Supponendo $r \le \dfrac{1}{2}$ e $\rho \le 1$ abbiamo che $\|F(x,0,0)\| = \sqrt{\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^2} = \sqrt{2}\dfrac{|x|}{|1+x|} \le \dfrac{3}{2}\dfrac{|x|}{1-\frac{1}{2}} = 3|x| \le 3r$, dunque per avere $\sup\limits_{x \in B_r(0)} |F(x,0,0)| \le \dfrac{\rho}{4} = \dfrac{\rho}{4\|T\|_\infty} \le \dfrac{\rho}{2\|T\|}$ è sufficiente prendere $r = \dfrac{\rho}{12}$; inoltre, $\mathbb{I}_2 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y_1, y_2) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} \frac{-2y_1(x+y_2)}{\left(1+x+y_1^2\right)^2} & \frac{1}{1+x+y_1^2} \\ \frac{1}{1+x+y_2^2} & \frac{-2y_2(x+y_1)}{\left(1+x+y_2^2\right)^2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} \frac{x+y_2^2}{1+x+y_2^2} & \frac{2y_2(x+y_1)}{\left(1+x+y_2^2\right)^2} \\ \frac{2y_1(x+y_2)}{\left(1+x+y_1^2\right)^2} & \frac{x+y_1^2}{1+x+y_1^2} \end{array}\right)$, dunque poiché $\left|\dfrac{x + y_2^2}{1 + x + y_2^2}\right| \le \dfrac{|x| + y_1^2 + y_2^2}{1 - \frac{1}{2}} \le 2r + 2\rho^2 \le \dfrac{\rho}{6} + 2\rho = \dfrac{13}{6}\rho$, $\left|\dfrac{2y_2(x+y_1)}{\left(1+x+y_2^2\right)^2}\right| \le \dfrac{2|y_2|(|x| + |y_1|)}{1 - \frac{1}{2}} \le 4(2\rho(r+\rho)) = 16\rho^2 + 16r\rho = \dfrac{52}{3}\rho^2 \le \dfrac{52}{3}\rho$, $\left|\dfrac{2y_1(x+y_2)}{\left(1+x+y_1^2\right)^2}\right| \le \dfrac{2|y_1|(|x| + |y_2|)}{1 - \frac{1}{2}} \le 4(2\rho(r+\rho)) = 4\rho^2 + 4r\rho = \dfrac{52}{3}\rho^2 \le \dfrac{52}{3}\rho$ e $\left|\dfrac{x + y_1^2}{1 + x + y_2^2}\right| \le \dfrac{|x| + y_1^2 + y_2^2}{1 - \frac{1}{2}} \le 2r + 2\rho^2 \le \dfrac{\rho}{6} + 2\rho = \dfrac{13}{6}\rho$, per avere $\sup\limits_{(x,y_1,y_2) \in B_r(0) \times B_\rho(0,0)} \left\|\mathbb{I}_2 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y_1, y_2)\right\| \le 2 \sup\limits_{(x,y_1,y_2) \in B_r(0) \times B_\rho(0,0)} \left\|\mathbb{I}_2 - T\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y_1, y_2)\right\|_\infty = \dfrac{104}{3}\rho \le \dfrac{1}{2}$ è sufficiente prendere $\rho = \dfrac{3}{208}$, e di conseguenza $r = \dfrac{1}{832}$.

   (c) Poichè $\dfrac{x + g_2(x)}{1 + x + g_1^2(x)} \equiv 0\ \forall x \in B_r(0)$, allora $0 = \left.\dfrac{d}{dx}\dfrac{x + g_2(x)}{1 + x + g_1^2(x)}\right|_{x=0} = \left.\dfrac{(1 + g_2'(x))\left(1 + x + g_1^2(x)\right) - (x + g_2(x))(1 + 2g_1'(x)g_1(x))}{\left(1 + x + g_1^2(x)\right)^2}\right|_{x=0} = 1 + g_2'(0) \Rightarrow g_2'(0) = -1$, perché $g_1(0) = 0 = g_2(0)$, dunque $g_2(x) = g_2(0) + g_2'(0)x + o(x) = -x + o(x)$; analogamente, $0 =$

$$= \frac{d}{dx}\frac{x+g_1(x)}{1+x+g_2^2(x)}\bigg|_{x=0} = \frac{(1+g_1'(x))\left(1+x+g_2^2(x)\right)}{\left(1+x+g_2^2(x)\right)^2} -$$

$$- \frac{(x+g_1(x))(1+2g_2'(x)g_2(x))}{\left(1+x+g_2^2(x)\right)^2}\Bigg|_{x=0} = 1+g_1'(0) \Rightarrow g_1'(0) = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_1(x) = -x + o(x).$$

3. (a) $x_n(k) = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n(k+1)}}\right)}{\sqrt{k+1}} \xrightarrow{\ell^p} x(k) = \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$ $\forall p \geq 1$, perché $\|x_n - x\|_p \leq$

$$\leq \|x_n - x\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n(k+1)}}\right)}{\sqrt{k+1}} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2n(k+1)}}{\sqrt{k+1}} =$$

$$= \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{\frac{3}{2}}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(b) $x_n(k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2^k+1)^j} = \frac{1}{2^k+1}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(2^k+1)^j} = \frac{1}{2^k+1}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2^k+1}\right)^n}{1-\frac{1}{2^k+1}} =$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{2^k+1}\right)^n}{2^k} \xrightarrow{\ell^p} x(k) = \frac{1}{2^k} \;\forall p \geq 1, \text{ perché } \|x_n - x\|_p \leq \|x_n - x\|_1 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1-\left(\frac{1}{2^k+1}\right)^{n+1}}{2^k} - \frac{1}{2^k} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{2^k+1}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. $\arctan\left(1+\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) = x$: posta $\Phi(x) = \arctan\left(1+\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$, si ha che $\Phi\left(\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\right) \subset \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, e inoltre $|\Phi'(x)| = \left|\dfrac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\left(1+\left(1+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right)}\right| \leq \dfrac{1}{2}$, dunque $|\Phi(x)-\Phi(y)| \leq \dfrac{|x-y|}{2}$ e quindi Φ è una contrazione in $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ e pertanto, essendo $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}$, Φ ha un unico punto fisso, cioè esiste un'unico valore $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ che risolve l'equazione $\arctan\left(1+\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) = \Phi(x) = x$.

5. $\begin{cases} x_0 = a \geq 1 \\ x_n = 1 + \frac{1}{x_{n-1}+1} \end{cases}$: posta $\Phi(x) = 1 + \dfrac{1}{x+1}$, si ha che $\Phi([1,+\infty)) \subset$ $\subset [1,+\infty)$ e inoltre $|\Phi'(x)| = \left|-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right| \leq \dfrac{1}{4}$ se $x \geq 1$, dunque $|\Phi(x)-$ $-\Phi(y)| \leq \dfrac{|x-y|}{4}$ $\forall x,y \in [1,+\infty)$; quindi, essendo $[1,+\infty)$ un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}$, per il teorema delle contrazioni l'equazione $x = \Phi(x)$ ha un'unica soluzione in $[1,+\infty)$ e la soluzione è data dal limite della successione $x_n = \Phi(x_{n-1})$, per qualunque scelta di $x_0 \in [1,+\infty)$; ciò equivale a

dire che il limite della successione di partenza è l'unica soluzione maggiore di 1 dell'equazione $x = 1 + \dfrac{1}{x+1} \Leftrightarrow x^2 + x = x + 1 + 1 \Leftrightarrow x^2 = 2$, che è proprio $\sqrt{2}$.