Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 3

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 2 (3 Marzo 2010)
Spazi normati, contrazioni

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$
$\|f_n\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|\,dx = \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}dx = \frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{2n^2x}{1+n^2x^2}dx = \frac{1}{2n}\log(1+n^2x^2)\Big|_0^1 =$
$= \dfrac{\log(1+n^2)}{2n}$.
$\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)|\,dx$
Siccome f_n è una funzione continua in $[0,1]$ questo sup è il massimo di f_n nell'intervallo $[0,1]$. Siccome
$$f_n'(x) = \frac{n(1+n^2x^2)-2n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2} = 0 \Longleftrightarrow n^2x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = \pm\frac{1}{n}$$
abbiamo $\|f_n\|_\infty = \max\left\{f_n(0), f_n\left(\dfrac{1}{n}\right), f_n(1)\right\} = \max\left\{0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{n}{1+n^2}\right\} = \dfrac{1}{2}$.
In particolare siccome $\|f_n\|_\infty \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ mentre $\|f_n\|_1 \nrightarrow 0$ le due norme non possono essere equivalenti.

2. $f_n(x) = e^{\frac{x}{n}}\sin^2 x$. Sia $f(x) = \sin^2 x$. Proviamo che $f_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ in $(C([0,\pi]), \|\cdot\|_1)$.
$\|f_n - f\|_1 = \displaystyle\int_0^\pi |f_n(x) - f(x)|dx = \int_0^\pi |e^{\frac{x}{n}}\sin^2 x - \sin^2 x|\,dx = \int_0^\pi |e^{\frac{x}{n}} - 1|\sin^2 x\,dx \le$
$\le \displaystyle\int_0^\pi (e^{\frac{\pi}{n}} - 1)\sin^2 x\,dx = (e^{\frac{\pi}{n}} - 1)\int_0^\pi \sin^2 x\,dx \le (e^{\frac{\pi}{n}} - 1)\int_0^\pi 1\,dx = \pi(e^{\frac{\pi}{n}} - 1) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$
Quindi $f_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ in $(C([0,\pi]), \|\cdot\|_1)$.

3. $x_n(k) = \dfrac{n}{ne^k+1}$
Per prima cosa osserviamo che $x_n(k) \approx \dfrac{1}{e^k}\ \forall\, n$ quindi $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty |x_n(k)|^p < \infty\ \forall\, p$ cioè $x_n \in \ell_p$ $\forall\, p \ge 1$. Sia $x \in \ell_p$ definita da $x(k) = \dfrac{1}{e^k}$ notiamo che
$$\|x_n - x\|_1 = \sum_{k=0}^\infty |x_n(k) - x(k)| = \sum_{k=0}^\infty \left|\frac{n}{ne^k+1} - \frac{1}{e^k}\right| = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{e^k(ne^k+1)} \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{e^{2k}} =$$
$= \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1-\frac{1}{e^2}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ quindi $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ in ℓ_1. Più in generale $\forall\, p \ge 1$ abbiamo che $\|x_n - x\|_p \le \|x_n - x\|_1 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ quindi $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ in ℓ_p

4. $x_n(k) = \dfrac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!(2n)^{k+1}}$
$$\|x_n\|_1 = \sum_{k=0}^\infty \left|\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!(2n)^{k+1}}\right| = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+2)!(2n)^{k+1}} = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{(2j)!(2n)^j} = \cosh\left(\frac{1}{2n}\right) - 1$$

In particolare $\|x_n\|_1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ qunidi x_n converge a 0 in ℓ_1

5. $x_n(k) = \dfrac{e^{-\frac{k}{n}}}{n}$.
$\|x_n\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |x_n(k)| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k}{n}}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty} (e^{-\frac{1}{n}})^k = \frac{1}{n}\frac{1}{1-e^{-\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}}{1-e^{-\frac{1}{n}}}$
$\|x_n\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |x_n(k)|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2k}{n}}}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\infty} (e^{-\frac{2}{n}})^k = \frac{1}{n^2}\frac{1}{1-e^{-\frac{2}{n}}} = \frac{1}{n}\frac{\frac{1}{n}}{1-e^{-\frac{2}{n}}}$
Dato che $\|x_n\|_2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ allora x_n converge a 0 in ℓ_2.
Invece x_n non converge in ℓ_1 infatti se per assurdo $\exists\, x \in \ell_1$ tale che $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ in ℓ_1 allora $\|x_n - x\|_2 \le \|x_n - x\|_1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ quindi $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ anche in ℓ_2. Ma allora per unicità del limite in ℓ_2 si dovrebbe avere $x = 0$ che è assudo perchè allora $\|x_n\|_1 = \|x_n - x\|_1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ mentre il conto precedente ci dice che $\|x_n\|_1 = \dfrac{\frac{1}{n}}{1-e^{-\frac{1}{n}}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

6. $x_n(k) = \dfrac{k^2 + nk + 2k + n}{(k^2+1)(n+k)}$.

   (a) $x_n(k) = \dfrac{k^2 + nk + 2k + n}{(k^2+1)(n+k)} \approx \dfrac{1}{k}$ $\forall\, n$ quindi $x_n \in \ell_2$ e $x_n \notin \ell_1$

   (b) Sia $x(k) = \dfrac{k+1}{k^2+1}$ allora

$$\|x_n - x\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |x_n(k) - x(k)|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{k^2+nk+2k+n}{(k^2+1)(n+k)} - \frac{k+1}{k^2+1} \right|^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{k}{(k^2+1)(n+k)} \right|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{k^2+1} \right)^2 \frac{1}{(n+k)^2} \le \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{k^2+1} \right)^2 \frac{1}{n^2} =$$

$$\le \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{k^2+1} \right)^2 \overset{n\to\infty}{=\!=\!\longrightarrow} 0 \quad \text{perché} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{k^2+1} \right)^2 \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} < \infty$$

   Quindi x_n converge ad x in ℓ_2.

   (c) Utilizzando il fatto che $n + k \ge 2\sqrt{nk}$ abbiamo che

$$\|x_n - x\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |x_n(k) - x(k)| = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{k^2+nk+2k+n}{(k^2+1)(n+k)} - \frac{k+1}{k^2+1} \right| =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k^2+1)(n+k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k^2+1)(n+k)} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1} \frac{1}{2\sqrt{nk}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^2+1}$$

   In particolare dato che $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{k}}{k^2+1} < \infty$ si ha che $\|x_n - x\|_1 < \infty$ (cioè $x_n - x \in \ell_1$) e che $\|x_n - x\|_1 \le \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{k}}{k^2+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ quindi $x_n - x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ in ℓ_1.

7. $x_n(k) = \dfrac{n \log\left(1 + \frac{1}{n\sqrt{k}}\right)}{\sqrt{1+k^2}}$.
Osserviamo per prima cosa che se $x \ge 0$ allora

$$|\log(1+x) - x| = \left| \int_0^x \frac{1}{1+t} - 1\, dt \right| \le \int_0^x \left| \frac{1}{1+t} - 1 \right| dt = \int_0^x \frac{t}{1+t}\, dt \le \int_0^x t dt = \frac{1}{2}x^2$$

Usando questo fatto ricaviamo che se $x(k) = \dfrac{1}{\sqrt{k}\,\sqrt{1+k^2}}$ allora

$$\|x_n - x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{n\log\left(1+\frac{1}{n\sqrt{k}}\right)}{\sqrt{1+k^2}} - \frac{1}{\sqrt{k}\,\sqrt{1+k^2}} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|n\log\left(1+\frac{1}{n\sqrt{k}}\right) - \frac{1}{\sqrt{k}}\right|}{\sqrt{1+k^2}} =$$

$$= n\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|\log\left(1+\frac{1}{n\sqrt{k}}\right) - \frac{1}{n\sqrt{k}}\right|}{\sqrt{1+k^2}} \le n\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2kn^2}}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{1+k^2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

perché $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{1+k^2}} \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$

8. $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right)$

   (a) Siccome x_n è definitivamente nulla allora $\|x_n\|_1 < \infty$ perché è una somma finita. Quinidi $x_n \in \ell_1$.

   (b) $\forall \varepsilon > 0$ se $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ allora $\forall\, n, m \ge n_\varepsilon$ si ha che $\|x_n - x_m\|_\infty = \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\} \le \frac{1}{n_\varepsilon} \le \varepsilon.$ Dunque x_n è una successione di Cauchy rispetto a $\|\ \|_\infty$.

   (c) Supponiamo per assurdo che $\exists\ x \in \ell_1$ tale che $\|x_n - x\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Allora $\forall\ k$ se $n \ge k$ si ha che $\left|\frac{1}{k} - x(k)\right| = |x_n(k) - x(k)| \le \|x_n - x\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ quindi necessariamente $x(k) = \frac{1}{k}$. Ma allora $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| = \sum_{k=1} \frac{1}{k} = \infty$ il che è assurdo perchè $x \in \ell_1$. In particolare $(\ \ell_1, \|\ \|_\infty)$ non è completo perché x_n è una successione di Cauchy in questo spazio ma non è convergente.

9. Sia $\Phi : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$ definita da $\Phi(f)(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^3 f(t)}dt.$

   Per prima cosa osserviamo che $\Phi(f) \in C([0,1])$ perché è la funzione integrale di una funzione continua, quindi Φ è ben definita. Inoltre se $f, g \in C([0,1])$ si ha che

$$|\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)| = \left|\int_0^x e^{t^3 f(t)}dt - \int_0^x e^{t^3 g(t)}dt\right| \le \int_0^x |e^{t^3 f(t)} - e^{t^3 g(t)}|\, dt \le$$

$$\le \int_0^x 3|t^3 f(t) - t^3 g(t)|dt = 3\int_0^x t^3|f(t) - g(t)|dt \le 3\,\|f-g\|_\infty \int_0^x t^3\ dt\ =$$

$$= 3\,\|f-g\|_\infty\, \frac{1}{4}x^4 \le \frac{3}{4}\|f-g\|_\infty.$$

   Pertanto $\|\Phi(f) - \Phi(g)\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)| \le \frac{3}{4}\|f-g\|_\infty.$

   Quindi Φ è una contrazione su $C([0,1])$.

   (Abbiamo usato il fatto che se $x, y \le 1$ allora $|e^x - e^y| \le 3|x-y|$)

10. $X = \{f \in C([0,1]) : 0 \le f(x) \le 1\ \forall x\}$

    $\Phi : X \to C([0,1]) \qquad \Phi(u)(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^x u^2(t)dt.$

    (a) Siano $f_n \in X$ e $f \in C([0,1])$ tali che $\|f_n - f\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, proviamo che $f \in X$. $\|f_n - f\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow f_n(x) \longrightarrow f(x)\ \forall\ x \in [0,1]$ quindi passando al limite nella

disuguaglianza $0 \leq f_n(x) \leq 1$ otteniamo che $0 \leq f(x) \leq 1 \ \forall \ x \in [0,1]$ cioè che $f \in X$.
Quindi X è chiuso perchè contiene i limiti di tutte le sue successioni.

(b) Sia $u \in X$ allora $0 \leq u(x) \leq 1 \ \forall \ x$ quindi

$$0 \leq \Phi(u)(x) = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\int_0^x u^2(t)dt \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\int_0^x 1 \ dt = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}x \leq \frac{2}{3} \leq 1 \Longrightarrow \Phi(u) \in X$$

Pertanto $\Phi(X) \subseteq X$. Inoltre se $u, v \in X$ allora abbiamo che

$$|\Phi(u)(x)-\Phi(v)(x)| = \left|\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\int_0^x u^2(t)dt - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\int_0^x v^2(t)dt\right| = \frac{1}{3}\left|\int_0^x u^2(t) - v^2(t) \ dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{3}\int_0^x |u^2(t)-v^2(t)|dt = \frac{1}{3}\int_0^x |u(t)-v(t)||u(t)+v(t)|dt \leq \frac{2}{3}\int_0^x |u(t)-v(t)|dt =$$

$$\leq \frac{2}{3}\int_0^x \|u-v\|_\infty dt = \frac{2}{3}x\|u-v\|_\infty \leq \frac{2}{3}\|u-v\|_\infty$$

(c) Il teorema delle contrazioni ci dice che Φ ha un unico punto fisso $u \in C([0,1])$. Per la definizione di punto fisso si ha $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\int_0^x u^2(t)dt = u(x) \ \forall \ x \in [0,1]$. Questa relzione ci dice che u è in realtà di classe C^1 e derivando rispetto ad x si ottiene che u è soluzione dell'equazione differenziale $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{3}u^2(x) \\ u(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$.
Per trovare u dobbiamo dunque risolvere l'equazione:

$$\int_0^x \frac{u'(t)}{u^2(t)}dt = \int_0^x \frac{1}{3}dt \Longrightarrow \int_{\frac{1}{3}}^{u(x)} \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{3}x \Longrightarrow -\frac{1}{y}\bigg|_{\frac{1}{3}}^{u(x)} = \frac{1}{3}x \Longrightarrow -\frac{1}{u(x)}+3 = \frac{1}{3}x$$

$$\Longrightarrow u(x) = -\frac{1}{\frac{1}{3}x-3} = \frac{3}{9-x}$$