Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

TUTORATO NUMERO 2 (2 OTTOBRE 2009)
LIMITI E CONTINUITÀ IN PIÙ VARIABILI

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{(x^2+y^2)^2}$

   (b) $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} \frac{\sin(x+y)}{x^4+y^2}$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(xyz)}{x^2+y^4+z^2}$

   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+\sqrt{x^2+y^2}\cos(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2. Discutere la continuità delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy^2}-1}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\arctan(x^2y^3)}{x^6+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

   (c) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2yz}{(x^4+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^4+z^2}} & \text{se } (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3\log(x^2+y^4)}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

   (e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\int_x^y e^{t^2}\,dt}{y-x} & \text{se } x\neq y \\ e^{xy} & \text{se } x=y \end{cases}$

3. Discutere, al variare dei parametri $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta>0$, la continuità della funzione $f(x_1,\ldots,x_n) = \dfrac{|x_1|^{\alpha_1}\ldots|x_n|^{\alpha_n}}{(x_1^2+\ldots+x_n^2)^\beta}$.

4. Sia $f\in C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ una funzione tale che $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = L$ con $-\infty<L<\infty$.

   (a) Provare che f ha un massimo o un minimo.

   (b) Provare che f è uniformemente continua.

5. Sia $f(x,y) = \dfrac{e^{\cos(x^3)}}{2+x^2+y^2+\arctan(x^4+y^4)}$. Provare che f ha un massimo ma non un minimo e calcolare $\inf_{\mathbb{R}^n} f$ e $\max_{\mathbb{R}^n} f$.