Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

Soluzioni del tutorato numero 9 (27 Novembre 2009)

Numeri complessi, spazi metrici, contrazioni

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. (a) $\log(2i-2) = \log|2i-2| + i\arg(2i-2) + 2k\pi i = \log\left(2\sqrt{2}\right) + \frac{3}{4}\pi i + 2k\pi i$

   (b) $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i} = \exp\left(\frac{1}{4}\log\left(-1-\sqrt{3}i\right)\right) = \exp\left(\frac{\log\left|-1-\sqrt{3}i\right| + i\arg\left(-1-\sqrt{3}i\right) + 2k\pi i}{4}\right) =$
   $\exp\left(\frac{\log 2}{4} + \frac{\pi i}{3} + \frac{k\pi i}{2}\right) = \exp\left(\log\left(\sqrt[4]{2}\right)\right)\exp\left(\frac{\pi i}{3} + \frac{k\pi i}{2}\right) =$
   $= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right)\right).$

   (c) $i^{\frac{2}{\pi}} = \exp\left(\frac{2}{\pi}\log i\right) = \exp\left(\frac{2}{\pi}(\log|i| + i\arg i + 2k\pi i)\right) = \exp\left(\frac{2}{\pi}\left(\frac{i\pi}{2} + 2k\pi i\right)\right) =$
   $= \exp(i+4k) = \cos(1+4k) + i\sin(1+4k).$

2. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$: il raggio di convergenza della serie è $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n^n|}} =$
   $= \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} n} = 0$, dunque la serie converge solo in $z = 0$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2+\exp(in)}$: il raggio di convergenza è $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{2+\exp(in)}\right|}} = 1$,
   perché $\frac{1}{3} \le \frac{1}{2+\exp(in)} \le 1$; sul bordo del disco di convergenza la serie diverge perché $|z| = 1 \Rightarrow \left|\frac{z^n}{2+\exp(in)}\right| \ge \frac{1}{3}$ e quindi il termine n-esimo non tende a 0.

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (3+i^n)^n z^n$: il raggio di convergenza è $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(3+i^n)^n\right|}} =$
   $= \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}|3+i^n|} = \frac{1}{4}$; sul bordo del disco non c'è convergenza perché $|z| = \frac{1}{4} \Rightarrow \left|\left(3+i^{4n}\right)^{4n} z^{4n}\right| = 1$ e dunque il termine n-esimo non tende a 0.

3. (a) $\frac{xe^{-nx^2}\cos(nx)}{\sqrt{1+\sin^2 x}} \overset{n\to\infty}{\to} 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, inoltre c'è equidominatezza perché $\left|\frac{xe^{-nx^2}\cos(nx)}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right| \le xe^{-nx^2} \le xe^{-x^2}$ che è integrabile in $[0,+\infty)$, e

la convergenza è uniforme perché $\sup\limits_{x\in[0,+\infty)} \left|\dfrac{xe^{-nx^2}\cos(nx)}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right| \leq$
$\leq \sup\limits_{x\in[0,+\infty)} xe^{-nx^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ in quanto $\dfrac{d}{dx}xe^{-nx^2} = \left(1-2nx^2\right)e^{-nx^2} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ e in questi punti la funzione vale $\dfrac{1}{\sqrt{2en}}$; dunque è lecito passare al limite sotto integrale, e dunque
$\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-nx^2}\cos(nx)}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{xe^{-nx^2}\cos(nx)}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx = \int_0^{+\infty} 0dx = 0.$

(b) $\dfrac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{e^{2x}+1} \overset{n\to\infty}{\to} \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$, e la convergenza è uniforme in quanto
$\sup\limits_{x\in\left[0,\frac{\log 3}{2}\right]} \left|\dfrac{e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{e^{2x}+1}\right| \leq \sup\limits_{x\in\left[0,\frac{\log 3}{2}\right]} \left|e^x - \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right| = e^{\frac{\log 3}{2}} -$
$-\left(1+\dfrac{\log 3}{2n}\right)^n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ perché $e^x - \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ è monotona crescente
$\forall n \in \mathbb{N}$; infatti, $\dfrac{d}{dx}e^x - \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x - \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n-1} \geq e^x - \dfrac{e^x}{1+\frac{x}{n}} =$
$e^x\left(\dfrac{x}{n+x}\right) \geq 0$. Dunque, essendo l'intervallo di integrazione limitato, si possono scambiare limite e integrale ottenendo così
$\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^{\frac{\log 3}{2}} \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{e^{2x}+1}dx = \int_0^{\frac{\log 3}{2}} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{e^{2x}+1}dx = \int_0^{\frac{\log 3}{2}} \frac{e^x}{e^{2x}+1} \overset{(y=e^x)}{=}$
$\overset{(y=e^x)}{=} \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dy}{1+y^2} = [\arctan y]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$

4. (a) Verifichiamo le tre proprietà: chiaramente $\|f\| := \sup\limits_{x\in[-1,1]} |f(x)| \geq 0$, perché $|f(x)| \geq 0\ \forall x \in [-1,1]$, e inoltre $\|f\| = 0 \Leftrightarrow \sup\limits_{x\in[-1,1]} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |f| \equiv 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$; poi, $\|\lambda f\| = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |\lambda f(x)| = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |\lambda||f(x)| =$
$= |\lambda| \sup\limits_{x\in[-1,1]} |f(x)| = |\lambda|\|f\|$, e infine $\|f+g\| = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |f(x)+g(x)| \leq$
$\leq \sup\limits_{x\in[-1,1]} (|f(x)|+|g(x)|) \leq \sup\limits_{x\in[-1,1]} |f(x)| + \sup\limits_{x\in[-1,1]} |g(x)| = \|f\|+\|g\|.$

(b) $T(\alpha f+\beta g) = (\alpha f+\beta g)'(0) = (\alpha f'+\beta g')(0) = \alpha f'(0)+\beta g'(0) =$
$= \alpha T(f) + \beta T(g)$, dunque T è lineare.

(c) $\|f_n\| = \sup\limits_{x\in[-1,1]} \left|\dfrac{\arctan(nx)}{n}\right| \leq \dfrac{\frac{\pi}{2}}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$, mentre $T(f_n) = \left(\dfrac{\arctan(nx)}{n}\right)'_{x=0} =$
$= \dfrac{1}{1+n^2x^2}_{x=0} = 1 \overset{n\to\infty}{\nrightarrow} 0$. Ciò implica che questa applicazione non è continua in 0: infatti, se lo fosse avremmo che $\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0 : \|f\|<\delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |T(f)| < \epsilon$, ma questo è falso perché per $\epsilon = 1$ non esiste alcun δ con verifica quella condizione per tutte le f, perché non è mai verificata per le f_n.

5. (a) Se $x \notin \ell^p$, allora chiaramente si ha $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p = +\infty$; se invece $x \in \ell^p$, allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$, dunque in particolare $|x_n| \overset{n\to\infty}{\to} 0$, per-

tanto $\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 1} |x(n)| = |x(\bar{n})| = (|x(\bar{n})|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p$.
Di conseguenza, se $\|x\|_p < +\infty$, allora $\|x\|_\infty < +\infty \; \forall p \geq 1$, dunque $x \in \ell^p \Rightarrow x \in \ell^\infty$.

(b) La successione costante $x_n = 1 \; \forall n \geq 1$ appartiene a ℓ^∞ perché $\|x\|_\infty = 1$ ma ovviamente $x \notin \ell^p \; \forall p \geq 1$ perché $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$.

(c) $\|x\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p-q}|x_n|^q \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x\|_\infty^{p-q}|x_n|^q = \|x\|_\infty^{p-q}\|x\|_q^q \leq \|x\|_q^{p-q}\|x\|_q^q = \|x\|_q^p$,
dunque $\|x\|_p \leq \|x\|_q$, dunque se $\|x\|_q < +\infty$, allora $\|x\|_p < +\infty \; \forall p \geq q \geq 1$, dunque $x \in \ell^q \Rightarrow x \in \ell^p$.

(d) Fissato $q \geq 1$, la successione $x_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{q}}}$ non appartiene a ℓ^q ma appartiene a ogni $\ell^p \; \forall p > q$, perché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ ma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty \; \forall \alpha > 1$.

(e) Come già visto in precedenza, $x \in \ell^p \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$, ma se ciò è vero allora $x_n \overset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$, e dunque $x \in \ell^p \Rightarrow x \in c_0$; tuttavia, la successione $x_n = \frac{1}{\log n}$ appartiene a c_0 ma a nessun ℓ^p, perché per il criterio di condensazione di Cauchy la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^p}$ ha lo stesso comportamento di $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n^p(\log 2)^p}$ e dunque diverge.

6. $|\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)| = \left|\int_0^1 ye^{-xy}(f(y) - g(y))dy\right| \leq \int_0^1 ye^{-xy}|f(y) - g(y)|dy \leq$
$= \|f - g\|_\infty \int_0^1 ye^{-xy}dy \leq \|f - g\|_\infty \int_0^1 ydy = \|f - g\|_\infty \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\|f - g\|_\infty}{2}$,
dunque passando al $\sup_{x\in[0,1]}$ ottengo che $\|\Phi(f) - \Phi(g)\|_\infty \leq \frac{\|f - g\|_\infty}{2}$ e dunque Φ è una contrazione.