Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

SOLUZIONI DEL TUTORATO NUMERO 8 (20 NOVEMBRE 2009)
SERIE DI POTENZE, SERIE DI TAYLOR, SERIE COMPLESSE

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. (a) $f(x)=\frac{1}{x^2+3}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(-\frac{x^2}{3}\right)}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{3^{n+1}}.$

   (b) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}=\left(1-x^4\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}\left(-x^4\right)^n=$
   $=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}(-1)^n x^{4n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{4n}.$

   (c) $f(x)=x\cosh\left(x^2\right)=x\frac{e^{x^2}+e^{-x^2}}{2}=\frac{x}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\right)=$
   $=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{4n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{(2n)!}.$

2. (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n dt=\int_0^x dt\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=\log(1-x).$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty}nx^{2n+1}=\frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}2nx^{2n-1}=\frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}x^{2n}=\frac{x^2}{2}\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=$
   $=\frac{x^2}{2}\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x^2}=\frac{x^2}{2}\frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{x^3}{\left(x^2-1\right)^2}.$

3. (a) $\log(-3)=\log|-3|+i\arg(-3)=\log 3+i\pi+2k\pi i.$

   (b) $\log\left(\sqrt{3}+i^3\right)=\log\left(\sqrt{3}-i\right)=\log\left|\sqrt{3}-i\right|+i\arg\left(\sqrt{3}-i\right)=\log 2+\frac{11}{6}\pi i+2k\pi i$

   (c) $\log\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n\pi^n}{n!}\right)=\log(\exp(i\pi))=i\pi+2k\pi i.$

   (d) $i^i=\exp(i\log i)=\exp\left(i\left(\frac{\pi}{2}i+2k\pi i\right)\right)=\exp\left(i^2\frac{\pi}{2}+2k\pi i^2\right)=e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}.$

4. (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{i^n n^2}$: il raggio di convergenza della serie è $\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{i^n}\right|}}=$
   $=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}1}=1$, e c'è convergenza anche su tutti i punti del bordo perché se $|z|=1$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{i^n n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty.$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i-1)^n}{n!}z^n$ converge $\forall z\in\mathbb{C}$ perché usando il criterio del rapporto otteniamo che $r=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(i-1)^n}{n!}}{\frac{(i-1)^{n+1}}{(n+1)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(i-1)^n}{(i-1)^{n+1}}\frac{(n+1)!}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{i-1}\right|=\infty.$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin(in)z^n=\sum_{n=1}^{\infty}i\frac{e^{-n}-e^n}{2}z^n$, dunque il raggio di convergenza è $\displaystyle\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^n-e^{-n}}{2}}}=\frac{1}{e\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1-e^{-2n}}{2}}}=\frac{1}{e}$; ai bordi del disco la serie diverge perché il termine n-esimo non tende a 0: infatti, $|z|=\dfrac{1}{e}\Rightarrow|\sin(in)z^n|=\dfrac{e^n-e^{-n}}{2e^n}\overset{n\to\infty}{\to}\dfrac{1}{2}.$

5. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{nx^4+n^3}$ converge totalmente (e dunque puntualmente e uniformemente) su tutto $\mathbb{R}$ perché $\displaystyle\frac{d}{dx}\frac{x^2}{nx^4+n^3}=\frac{2nx\left(n^2-x^4\right)}{\left(nx^4+n^3\right)^2}$ si annulla in $x=0$ e $x=\pm\sqrt{n}$; dunque, poiché $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{nx^4+n^3}=0$, ho che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{x^2}{nx^4+n^3}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{n}\right)^2}{n\left(\sqrt{n}\right)^4+n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty.$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n}$ converge totalmente su $[-M,M]$ $\forall M>0$ perché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in[-M,M]}\left|\frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan\left(\frac{M}{n}\right)}{n}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n^2}<+\infty$, dunque la convergenza è anche uniforme su $[-M,M]$ e quindi puntuale su $\mathbb{R}$, ma non è uniforme (né totale) perché $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{n=N}^{2N-1}\frac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n}\right|\ge$
$\displaystyle\ge\sum_{n=N}^{2N-1}\frac{\arctan\left(\frac{2N-1}{n}\right)}{n}\ge\arctan 1\sum_{n=N}^{2N-1}\frac{1}{n}\ge\frac{\pi}{4}\sum_{n=N}^{2N-1}\frac{1}{2N}=\frac{\pi}{8}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^x x^n$ converge puntualmente in $(-1,1)$ perché usando il criterio della radice n-esima ottengo che $\sqrt[n]{|(-1)^n n^x x^n|}=|x|$, e in $x=\pm1$ le serie corrispondenti sono $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ che non convergono; la convergenza non può essere uniforme né totale perché non c'è convergenza sul bordo dell'intervallo, ma è totale e uniforme in $[-1+\delta,1-\delta]$ $\forall\delta\in(0,1)$ perché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in[-1+\delta,1-\delta]}|(-1)^n n^x x^n|=\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-\delta}(1-\delta)^n<+\infty.$

6. (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{ne^x\arctan(nx)}{n^2x^2+1}dx\overset{(y=nx)}{=}\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{e^{\frac{y}{n}}\arctan y}{y^2+1}dy$: l'intervallo di integrazione è limitato, e l'integranda converge uniformemente a

$\dfrac{\arctan y}{y^2+1}$, perché $\sup\limits_{y\in[0,1]}\left|\dfrac{e^{\frac{y}{n}}\arctan y}{y^2+1}-\dfrac{\arctan y}{y^2+1}\right| = \sup\limits_{y\in[0,1]}\dfrac{\left|e^{\frac{y}{n}}-1\right|\arctan y}{y^2+1} \le$
$\le \dfrac{\pi}{4}\sup\limits_{y\in[0,1]}\left(e^{\frac{y}{n}}-1\right) = \dfrac{\pi}{4}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) \overset{n\to\infty}{\to} 0$; dunque, possiamo scambiare limite e integrale ottenendo $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{ne^x\arctan(nx)}{n^2x^2+1}dx =$
$= \displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{y}{n}}\arctan y}{y^2+1}dy = \int_0^1\dfrac{\arctan y}{y^2+1} = \left[\dfrac{\arctan^2 y}{2}\right]_0^1 = \dfrac{\pi^2}{32}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-nx}}{n+1}$ converge totalmente in $[\delta,+\infty)\ \forall\delta>0$, dunque essendo anche a termini positivi possiamo scambiare serie e integrali e quindi
$\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-nx}}{n+1}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-nx}}{n+1}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{-e^{-nx}}{n^2+n}\right]_0^{+\infty} = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+n} =$
$= \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right) = 1-\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1} = 1.$

7. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$: la convergenza è uniforme perché $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \left|\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\right| \overset{N\to\infty}{\to} 0$ in quanto è il resto di una serie convegente, ma non c'è convergenza assoluta (e quindi neanche totale) perché $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n} = +\infty$.

(b) Non esistono, in quanto la convergenza totale implica quella assoluta.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\arctan\left(\frac{x}{n}\right)}{n}$. (Vedere esercizio 5 punto b).

(d) Non esistono, in quanto la convergenza totale implica quella uniforme.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x}{n}$: fissato x, la serie converge puntualmente ma non assolutamente; inoltre, la convergenza non è uniforme (e quindi neanche totale) perché $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|\displaystyle\sum_{n=N}^{2N-1}\dfrac{(-1)^n x}{n}\right| \ge \left|\displaystyle\sum_{n=N}^{2N-1}\dfrac{(-1)^n N}{n}\right| = N\left|\displaystyle\sum_{n=N}^{2N-1}\dfrac{(-1)^n}{n}\right| =$
$= N\left(\dfrac{1}{N}-\dfrac{1}{N+1}+\ldots+\dfrac{1}{2N-2}-\dfrac{1}{2N-1}\right) = N\left(\dfrac{1}{N(N+1)}+\ldots+\right.$
$\left.+\dfrac{1}{(2N-2)(2N-1)}\right) \ge N\left(\dfrac{1}{4N^2}+\ldots+\dfrac{1}{4N^2}\right) = N\dfrac{N}{2}\dfrac{1}{4N^2} = \dfrac{1}{8} \overset{N\to\infty}{\not\to} 0.$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\chi_{[n-1,n)}$: fissato x, la serie è costituita da un unico termine e quindi la convergenza è puntuale e assoluta; inoltre, è uniforme, perché $\left|\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty}\dfrac{1}{n}\chi_{[n-1,n)}\right| = \dfrac{1}{N} \overset{N\to\infty}{\to} 0$; tuttavia, non c'è convergenza totale in quanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\dfrac{1}{n}\chi_{[n-1,n)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n} = +\infty$.