Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

SOLUZIONE DEL TUTORATO NUMERO 2 (2 OTTOBRE 2009)
LIMITI E CONTINUITÀ IN PIÙ VARIABILI

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{(x^2+y^2)^2}$ non esiste: infatti, ponendo $y=0$ si ha che $\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4}{x^4} = 1$, mentre per $y=x$ si ha $\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4}{(x^2+x^2)^2} = \frac{x^4}{4x^4} = \frac{1}{4}$.

   (b) $\lim_{|(x,y)|\to\infty} \frac{\sin(x+y)}{x^4+y^2} = 0$: infatti, $\left|\frac{\sin(x+y)}{x^4+y^2}\right| \le \frac{1}{x^4+y^2} \le \frac{1}{x^2+y^2-\frac{1}{4}} \overset{\|(x,y)\|\to\infty}{\longrightarrow} 0$, perché $0 \le \left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2 = x^4-x^2+\frac{1}{4} \Rightarrow x^4 \ge x^2-\frac{1}{4}$.

   (c) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(xyz)}{x^2+y^4+z^2} = 0$: infatti, $\left|\frac{\sin(xyz)}{x^2+y^4+z^2}\right| \le \frac{|xyz|}{x^2+y^4+z^2} = \frac{|xz||y|}{x^2+y^4+z^2} \le \frac{x^2+z^2}{2}\frac{|y|}{x^2+y^4+z^2} \le \frac{\left(x^2+y^4+z^2\right)|y|}{2\left(x^2+y^4+z^2\right)} = \frac{|y|}{2} \overset{(x,y,z)\to(0,0,0)}{\longrightarrow} 0$.

   (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+\sqrt{x^2+y^2}\cos(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1$: infatti, $\frac{x^2+\sqrt{x^2+y^2}\cos(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \cos(x-y)$, $\cos(x-y) \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 1$ e $\left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$.

2. (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy^2}-1}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y)\ne(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ è continua in tutti i punti diversi dall'origine ma non è continua in $(0,0)$ perché $\lim_{x\to0} f(y^2,y) = \lim_{y\to0}\frac{e^{y^4}-1}{2y^4} \overset{y\to0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\arctan\left(x^2y^3\right)}{x^6+y^4} & \text{se } (x,y)\ne(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ è sicuramente continua in tutti i punti diversi da $(0,0)$, e lo è anche nell'origine perché $\left|\frac{\arctan\left(x^2y^3\right)}{x^6+y^4}\right| \le \frac{x^2|y|^3}{x^6+y^4} = \frac{(x^6)^{\frac{1}{3}}(y^4)^{\frac{3}{4}}}{x^6+y^4} \le \frac{\left(x^6+y^4\right)^{\frac{1}{3}}\left(x^6+y^4\right)^{\frac{3}{4}}}{x^6+y^4} = \left(x^6+y^4\right)^{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-1=\frac{1}{12}} \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$.

   (c) $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2yz}{(x^4+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^4+z^2}} & \text{se } (x,y,z)\ne(0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$ è ovviamente continua in tutti i punti diversi da $(0,0,0)$, e lo è anche

nell'origine perché $\left|\frac{x^2yz}{(x^4+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^4+z^2}}\right| \leq$
$\left|\frac{(x^2+y^4+z^2)(x^4+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}(x^4+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^4+y^2+z^2)(x^2+y^4+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right| = (x^2+y^4+z^2)^{\frac{1}{2}} \overset{(x,y,z)\to(0,0,0)}{\to} 0.$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\int_x^y e^{t^2}dt}{y-x} & \text{se } x \neq y \\ e^{xy} & \text{se } x = y \end{cases}$ è ovviamente continua all'infuori della bisettrice del primo e terzo quadrante; inoltre, la funzione è continua anche lungo questa retta, perché, per il teorema della media integrale, si ha $\frac{\int_x^y e^{t^2}dt}{y-x} = e^{z^2}$ per un opportuno $z \in [x,y]$, quindi $\left|\frac{\int_x^y e^{t^2}dt}{y-x} - e^{xy}\right| = \left|e^{z^2} - e^{xy}\right| \overset{(x,y)\to(x_0,x_0)}{\to} \left|e^{x_0^2} - e^{x_0^2}\right| = 0.$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3\log(x^2+y^4)}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ è ovviamente continua in tutti i punti diversi da $(0,0,0)$, e lo è anche nell'origine perché $\left|\frac{xy^3\log(x^2+y^4)}{x^2+y^4}\right| \leq \frac{|xy^3|}{x^2+y^2}\frac{8}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{8}}} \leq \frac{8|xy^3|}{(x^2+y^4)^{\frac{9}{8}}} \leq$
$\leq 8(x^2+y^4)^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{9}{8}} = \frac{1}{8} \overset{(x,y)\to(x_0,x_0)}{\to} 0.$

3. Chiaramente la funzione è continua in ogni punto diverso da $(0,\ldots,0)$. Nell'origine invece è continua $\Leftrightarrow \alpha_1+\ldots+\alpha_n > 2\beta$: infatti, in questo caso abbiamo che $0 \leq \frac{|x_1|^{\alpha_1}\ldots|x_n|^{\alpha_n}}{(x_1^2+\ldots+x_n^2)^\beta} = \frac{(x_1^2)^{\frac{\alpha_1}{2}}\ldots(x_n^2)^{\frac{\alpha_n}{2}}}{(x_1^2+\ldots+x_n^2)^\beta} \leq$
$\leq \frac{(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}{2}}}{(x_1^2+\ldots+x_n^2)^\beta} = (x_1^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}{2}-\beta} \overset{(x_1,\ldots,x_n)\to(0,\ldots,0)}{\to} 0;$
se invece $\alpha_1+\ldots+\alpha_n \leq 2\beta$, allora $f(x,\ldots,x) = \frac{|x|^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{(nx^2)^\beta} =$
$\frac{|x|^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n-2\beta}}{n^\beta} \overset{x\to 0}{\not\to} 0.$

4. (a) Se $f \equiv L$ allora f ha ovviamente sia un massimo che un minimo. Supponiamo dunque che f non sia costante: allora $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(x_0) \neq L$, diciamo $f(x_0) < L$. Sia $x_n \in \mathbb{R}^n$ una successione minimizzante (ovvero una successione tale che $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\to} \inf_{\mathbb{R}^n} f$: x_n è una successione limitata, perché se così non fosse esisterebbe una sottosuccessione x_{n_k} tale che $\|x_{n_k}\| \to \infty$ e dunque si avrebbe che $f(x_{n_k}) \to L$ mentre sappiamo che $f(x_{n_k}) \to \inf_{\mathbb{R}^n} f \leq f(x_0) < L$. Dunque da x_n possiamo estrarre una sottosuccessione x_{n_j} tale che $x_{n_j} \to x \in \mathbb{R}^n$. Siccome f è continua, $f(x_{n_j}) \to f(x)$ ma poiché $f(x_{n_j}) \to \inf_{\mathbb{R}^n} f$ si ha che $f(x) = \inf_{\mathbb{R}^n} f$. Quindi x è un punto di minimo assoluto di f. In modo analogo si prova che se $f(x_0) > L$ allora f ammette un punto di massimo assoluto.

(b) Poichè $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = L$ allora $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists M > 0$ tale che $\|x\| \geq M \Rightarrow |f(x) - L| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. In particolare, $\|x\|, \|y\| \geq M \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Consideriamo ora la palla chiusa $\bar{B}_{M+1}(0)$. Siccome questa palla è compatta, f è uniformemente continua in $\bar{B}_{M+1}(0)$ cioè $\exists\delta$ (che possiamo supporre < 1) tale che $x, y \in \bar{B}_{M+1}(0), \|x - y\| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Ma allora $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$ tali che $\|x - y\| < 1$, $x, y \in \overline{B}_{M+1}(0)$ oppure $x, y \notin B_M(0)$ e quindi in ogni caso $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Quindi f è uniformemente continua.

5. $0 < f(x,y) = \dfrac{e^{\cos\left(x^3\right)}}{2 + x^2 + y^2 + \arctan\left(x^4 + y^4\right)} \leq \dfrac{e}{2} = f(0,0)$, dunque $\max_{\mathbb{R}^2} f = \dfrac{e}{2}$; inoltre, $|f(x,y)| \leq \dfrac{e}{2 + x^2 + y^2} \overset{\|(x,y)\|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e dunque $\inf_{\mathbb{R}^2} f = 0$ (e questo inf non è un minimo perché $f(x,y) > 0\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.