Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Gabriele Mancini, Luca Battaglia e Vincenzo Morinelli

SOLUZIONI DEL TUTORATO NUMERO 11 (11 DICEMBRE 2009)
EQUAZIONI DIFFERENZIALI, RIPASSO

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. (a) $\begin{cases} \dot{x} = e^{x+t} \\ x(0) = 0 \end{cases}$: $\dot{x(t)} = e^{x(t)}e^t \Rightarrow e^t - 1 = \int_0^t e^s ds = \int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{e^{x(s)}} ds \stackrel{(x=x(t))}{=} \int_0^{x(t)} e^{-x} dx = 1 - e^{-x(t)} \Rightarrow e^{-x(t)} =$ $= 2 - e^{-t} \Rightarrow x(t) = -\log\left(2 - e^t\right)$.

   (b) $\begin{cases} \dot{x} = e^{x^3+t^2} \arctan x \\ x(0) = 0 \end{cases}$: la condizione iniziale è un punto di equilibrio per il sistema, dunque la soluzione è $x(t) \equiv 0 \; \forall t \in \mathbb{R}$.

   (c) $\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{t} + t\log t \\ x(1) = -1 \end{cases}$: $x(t) = e^{\int_1^t \frac{ds}{s}} \left(-1 + \int_1^t e^{-\int_1^s \frac{du}{u}} s \log s ds\right) = e^{\log t}\left(-1 + \int_0^t e^{-\log s} s \log s ds\right) = t\,(-1+$ $+ \int_0^t \frac{s \log s}{s} ds\Big) = -t + t\int_1^t \log s ds = -t + t\left([s\log s]_1^t - \int_1^t \frac{s}{s} ds\right) = -t + t(t\log t + 1 - t) = t^2 \log t - t^2$.

   (d) $\begin{cases} \dot{x} = \sin x \cos x \sin^2 t \cos t \\ x(0) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$: $\frac{\dot{x}(t)}{\sin x \cos x} = \sin^2 t \cos t \Rightarrow \frac{\sin^3 t}{3} = \int_0^t \sin^2 s \cos s ds = \int_{\frac{\pi}{4}}^{x(t)} \frac{dx}{\sin x \cos x} =$ $= \int_{\frac{\pi}{4}}^{x(t)} \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x \sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{x(t)} \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} dx = [\log(\sin x) - \log(\cos x)]_{\frac{\pi}{4}}^{x(t)} = \log(\tan(x(t))) \Rightarrow x(t) =$ $= \arctan\left(e^{\frac{\sin^3 t}{3}}\right)$.

2. (a) $\begin{cases} \ddot{x} - \dot{x} - 6x = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \\ x(0) = 2 \end{cases}$: $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2) \Rightarrow x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t}$; determiniamo c_1 e c_2 imponendo le condizioni iniziali: $\begin{cases} \dot{x}(0) = 3c_1 e^{3\cdot 0} - 2c_2 e^{-2\cdot 0} = 3c_1 - 2c_2 = 1 \\ x(0) = c_1 + c_2 = 2 \end{cases}$, dunque $c_1 = 1 = c_2 \Rightarrow x(t) =$ $= e^{3t} + e^{-2t}$.

   (b) $\begin{cases} \ddot{x} - 6\dot{x} + 10x = 0 \\ \dot{x}(0) = -1 \\ x(0) = 1 \end{cases}$: $P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 10 = (\lambda - 3 - i)(\lambda - 3 + i) \Rightarrow x(t) = c_1 e^{-3t}\cos t + c_2 e^{-3t} \sin t$; imponendo le condizioni iniziali trovo che
   $\begin{cases} \dot{x}(0) = 3c_1 e^{3\cdot 0}\cos 0 - c_1 e^{3\cdot 0}\sin 0 + 3c_2 e^{3\cdot 0}\sin 0 + c_2 e^{-3\cdot 0}\cos 0 = 3c_1 + c_2 = -1 \\ x(0) = c_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow (c_1, c_2) = (1, -4) \Rightarrow$
   $\Rightarrow x(t) = e^{-3t}\cos t - 4e^{-3t}\sin t$.

   (c) $\begin{cases} \dddot{x} - 3\ddot{x} + 3\dot{x} - x = 0 \\ \ddot{x}(0) = 2 \\ \dot{x}(0) = 1 \\ x(0) = 2 \end{cases}$: $P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 \Rightarrow x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t \Rightarrow$
   $\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}(0) = (c_1 + 2c_2 + 2c_3)e^0 + (c_2 + 4c_3)0e^0 + c_3 0^2 e^0 = c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 2 \\ \dot{x}(0) = (c_1 + c_2)e^0 + (c_2 + 2c_3)0e^0 + c_3 0^2 e^0 = c_1 + c_2 = 1 \\ x(0) = c_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow (c_1, c_2, c_3) = (2, -1, 1) \Rightarrow$
   $\Rightarrow x(t) = 2e^t + te^t - t^2 e^t$.

(d) $\begin{cases} \dddot{x} + 8x = 0 \\ \ddot{x}(0) = 2\sqrt{3} \\ \dot{x}(0) = \sqrt{3} \\ x(0) = 3 \end{cases}$: $P(\lambda) = \lambda^3 + 8 = (\lambda + 2)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 4\right) = (\lambda + 2)\left(\lambda + 1 - \sqrt{3}i\right)\left(\lambda - 1 + \sqrt{3}i\right) \Rightarrow x(t) =$

$= c_1 e^{-2t} + c_2 e^t \cos\left(\sqrt{3}t\right) + c_3 e^t \sin\left(\sqrt{3}t\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}(0) = 4c_1 e^{2\cdot 0} + \left(2\sqrt{3}c_3 - 2c_2\right) e^0 \cos\left(\sqrt{3}\cdot 0\right) + \left(-2\sqrt{3}c_2 - 2c_3\right) e^0 \sin\left(\sqrt{3}\cdot 0\right) = 4c_1 - 2c_2 + 2\sqrt{3}c_3 = 2\sqrt{3} \\ \dot{x}(0) = -2c_1 e^{2\cdot 0} + \left(c_2 + \sqrt{3}c_3\right) e^0 \cos\left(\sqrt{3}\cdot 0\right) + \left(c_3 - \sqrt{3}c_2\right) e^0 \sin\left(\sqrt{3}\cdot 0\right) = -2c_1 + c_2 + \sqrt{3}c_3 = \sqrt{3} \\ x(0) = c_1 + c_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (c_1, c_2, c_3) = (1, 2, 1) \Rightarrow x(t) = e^{-2t} + 2e^t \cos\left(\sqrt{3}t\right) + e^t \sin\left(\sqrt{3}t\right)$.

3. $\dddot{x} - x = 0$: $P(\lambda) = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 + \lambda + 1\right) = (\lambda - 1)\left(\lambda + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right) \Rightarrow x(t) = c_1 e^t +$
$+ c_2 e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_3 e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ sono tutte le soluzioni dell'equazione; imponiamo ora le due condizioni: essendo $x(0) = c_1 + c_2$, la prima condizione equivale a dire $c_1 = -c_2$; inoltre, affinché $x(t) \overset{t\to+\infty}{\to} 0$, dovrà essere anche $c_1 = 0$; riassumendo, le soluzioni che rispettano entrambe le condizioni sono tutte e sole quelle in cui $c_1 = 0 = c_2$, cioè quelle del tipo $x(t) = c_3 e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$, al variare del parametro reale c_3.

4. $\begin{cases} \ddot{x} + \alpha x = 0 \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 0 \end{cases}$: se $\alpha = 0$, le soluzioni dell'equazione sono $x(t) = c_1 + c_2 t$, e imponendo le condizioni otteniamo $\begin{cases} x(0) = c_1 = 0 \\ x(1) = c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$, cioè $c_1 = 0 = c_2$, e quindi c'è solo la soluzione banale; se invece $\alpha < 0$, le soluzioni sono del tipo $x(t) = c_1 e^{\sqrt{-\alpha}t} + c_2 e^{-\sqrt{-\alpha}t}$, dunque con le condizioni iniziali abbiamo $\begin{cases} x(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ x(1) = c_1 e^{\sqrt{-\alpha}} + c_2 e^{-\sqrt{-\alpha}} = 0 \end{cases}$, e anche questo sistema ci dà solo la soluzione banale; infine, se $\alpha > 0$, le soluzioni sono $c_1 \cos\left(\sqrt{\alpha}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\alpha}t\right)$, e imponendo le condizioni otteniamo $\begin{cases} x(0) = c_1 = 0 \\ x(1) = c_1 \cos(\sqrt{\alpha}) + c_2 \sin(\sqrt{\alpha}) = 0 \end{cases}$: la prima equazione ci dice che $c_1 = 0$, la seconda che $c_2 \sin(\sqrt{\alpha}) = 0$: se $\sqrt{\alpha} \notin \pi\mathbb{Z}$ allora $\sin(\sqrt{\alpha}) \neq 0$ e dunque anche in questo caso c'è solo la soluzione banale, mentre se $\sqrt{\alpha} \in \pi\mathbb{Z}$ la seconda condizione è verificata per ogni $c_2 \in \mathbb{R}$; dunque, $\forall n \in \mathbb{N}$ abbiamo che per $\alpha = n^2\pi^2$ ci sono come soluzioni non banali $x(t) = c_2 \sin(n\pi t)$ al variare del parametro reale c_2.

5. $\begin{cases} \dot{x} = y(x+y)^n \\ \dot{y} = x(x+y)^n \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$: con il cambio di variabile $\begin{cases} w = x + y \\ z = x - y \end{cases}$ otteniamo che $\begin{cases} \dot{w} = \dot{x} + \dot{y} = (x+y)^{n+1} = w^{n+1} \\ \dot{z} = \dot{x} - \dot{y} = (y-x)(x+y)^n = -zw^n \\ w(0) = x(0) + y(0) = 1 \\ z(0) = x(0) - y(0) = 1 \end{cases}$:
la variabile $w(t)$ può essere trovata esplicitamente per separazione di variabili: $t = \int_0^t ds = \int_1^{w(t)} \frac{dw}{w^{n+1}} = \left[-\frac{1}{nw^n}\right]_1^{w(t)} =$
$= \frac{1}{n} - \frac{1}{nw^n(t)} \Rightarrow \frac{1}{w^n(t)} = 1 - nt \Rightarrow w(t) = \frac{1}{\sqrt[n]{1-nt}}$; a questo punto può essere trovata anche la variabile $z(t)$: $\begin{cases} \dot{z} = -\frac{z}{1-nt} \\ z(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\log(1-nt)}{n} = \left[\frac{\log(1-ns)}{n}\right]_0^t = -\int_0^t \frac{ds}{1-ns} = \int_1^{z(t)} \frac{dz}{z} = \log(z(t)) \Rightarrow z(t) = e^{\frac{\log(1-nt)}{n}} =$
$= \sqrt[n]{1-nt}$; dunque, tornando alle variabili di partenza, otteniamo che $\begin{cases} x(t) = \frac{w(t)+z(t)}{2} = \frac{1}{2\sqrt[n]{1-nt}} + \frac{\sqrt[n]{1-nt}}{2} \\ y(t) = \frac{w(t)-z(t)}{2} = \frac{1}{2\sqrt[n]{1-nt}} - \frac{\sqrt[n]{1-nt}}{2} \end{cases}$.

6. (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1}$ è una serie a termini positivi che converge totalmente in ogni insieme del tipo $[\delta, +\infty)$, perché $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in[\delta,+\infty)} \left|\frac{e^{-nx}}{n+1}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n\delta}}{n+1} < +\infty$; dunque, è lecito scambiare serie e integrale ottenendo così $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^{+\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{n+1}$ converge totalmente in $[\delta, +\infty)$, perché $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in[\delta,+\infty)} \left|\frac{e^{-nx}\sin(nx)}{n+1}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in[\delta,+\infty)} \left|\frac{e^{-nx}}{n+1}\right| =$ $\displaystyle= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n\delta}}{n+1} < +\infty$, e inoltre $\displaystyle\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{n+1}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|e^{-nx}\sin(nx)|}{n+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n+1}$, che è integrabile per quanto visto in precedenza, dunque c'è equidominatezza e quindi è possibile scambiare serie e integrale:

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{n+1} dx \overset{(y=nx)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \int_0^{+\infty} e^{-y}\sin y dy = \int_0^{+\infty} e^{-y}\sin y dy =$$

$$[-e^{-y}\sin y]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-y}\cos y dy = \int_0^{+\infty} e^{-y}\cos y dy = [-e^{-y}\cos y]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-y}\sin y dy = 1-$$

$$-\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin y dy = 1 - \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{n+1} dx \Rightarrow 2\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{n+1} dx = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{n+1} dx = \frac{1}{2}.$$