AM2 2009-2010

RECUPERO II ESONERO

TEMA 1.

Siano $a_n \in C((a,b))$, $\quad -\infty \leq a < b \leq +\infty$ tali che

(i) $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |a_n(x)|dx < \infty$

(ii) $\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *converge totalmente in ogni* $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$

Provare che

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)dx \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x)dx$$

TEMA 2.

Provare che i polinomi trigonometrici sono densi nello spazio $C_{2\pi}(\mathbf{R})$ delle funzioni continue e $2\pi-$periodiche, munito della metrica della convergenza uniforme. Dedurre che $f \equiv 0$ é l'unica funzione in $C_{2\pi}(\mathbf{R})$ ad avere tutti i coefficenti di Fourier nulli.

TEMA 3. Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. Sia $\gamma \in C^1((0,T))$ tale che

$$\dot\gamma(t) = f(\gamma(t)) \qquad \forall t \in (0,T)$$

Provare che se

$$M := \sup_{t \in [0,T)} \|f(\gamma(t))\| < +\infty$$

allora γ é prolungabile oltre T.

TEMA 4. Enunciare e provare la diseguaglianza di Gronwall.

TEMA 5. Siano $a_{ij}, b \in C(\mathbf{R})$, $\quad i,j = 1, \ldots, n$.

Provare che l'integrale generale del sistema differenziale lineare non omogeneo $\dot x = \mathcal{A}x + b \qquad$ é dato da

$$x(t) \; = \; X\left(c \, + \, \int_0^t X^{-1} b d\tau\right) \qquad c \in \mathbf{R}^n$$

ove X é matrice fondamentale del sistema omogeneo associato.

ESERCIZIO 1. Calcolare

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \frac{1}{\|x\|^{n-2}}, \qquad x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$$

ESERCIZIO 2.

Sia $l^\infty = \{x : \mathbf{N} \to \mathbf{R} : \quad \sup_{n\in\mathbf{N}} |x(n)| < +\infty\}$.

Sia $\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbf{N}} |x(n)|$ per ogni $x \in l^\infty$.

Provare che $\|x\|_\infty$ é una norma in l^∞ e che con tale norma l^∞ é completo.

Stabilire poi se $l^1 := \{x \in l^\infty : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| < +\infty\}$ é un sottoinsieme chiuso di l^∞.

ESERCIZIO 3.

Sia f continua in $\mathbf{R}^n$ e nulla fuori di una palla. Sia p un polinomio di grado n.

Provare che $f * p$ é un polinomio di grado n.

ESERCIZIO 4.

Stabilire per quali $x_0 \in \mathbf{R}$, se esistono, la soluzione del problema di Cauchy

$$\dot{x} = x^4 - 16, \qquad x(0) = x_0$$

é definita per tutti i tempi.

ESERCIZIO 5. Trovare l'integrale generale di

$$x^{(5)} - 5x^{(4)} + 10x^{(3)} - 10x^{(2)} + 5x' - x = e^t$$