AM2 2009-2010: APPELLO A

TEMA 1.

Sia $f \in C^2(O)$, O aperto in $\mathbf{R}^2$. Provare che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \quad \forall (x,y) \in O$$

TEMA 2.

Sia $f \in C^2(D_r(u))$. Provare la formula di Taylor:

$$f(u+h) \;=\; f(u) + \;< \nabla f(u)\,,\, h > \;+ \tfrac{1}{2} < H_f(u)\, h,\, h > \;+\; \circ\,(||h||^2).$$

TEMA 3.

Provare che i polinomi trigonometrici sono densi nello spazio $C_{2\pi}(\mathbf{R})$ delle funzioni continue e $2\pi-$periodiche, munito della metrica della convergenza uniforme. Dedurre che $f \equiv 0$ é l'unica funzione in $C_{2\pi}(\mathbf{R})$ ad avere tutti i coefficenti di Fourier nulli.

TEMA 4.

Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. Sia $\gamma \in C^1((0,T))$ tale che

$$\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t)) \qquad \forall t \in (0,T)$$

Provare che se

$$M := \sup_{t \in [0,T)} \|f(\gamma(t))\| < +\infty$$

allora γ é prolungabile oltre T.

TEMA 5.

Enunciare e provare la diseguaglianza di Gronwall.

ESERCIZIO 1. Calcolare

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \frac{1}{\|x\|^{n-2}}, \qquad x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$$

ESERCIZIO 2.

Sia $f(x, y) = x^4 - 2x^2 - y^4 + 2y^2, \quad g = f^2$.
Determinare i punti stazionari di g e stabilire se si tratta di minimi/ massimi/ selle.

ESERCIZIO 3.

Data $f \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, sia $g(\rho, \theta) := f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.
Esprimere $g_{\rho\rho}, g_{\theta\theta}$ mediante f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} e dedurre che

$$f_{xx}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + f_{yy}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = g_{\rho\rho} + \tfrac{1}{\rho^2} g_{\theta\theta} + \tfrac{1}{\rho} g_\rho$$

Utilizzare tale formula per trovare le funzioni $f \in C^2(\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbf{R})$ a simmetria radiale (tali cioé che $\frac{\partial}{\partial\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \equiv 0$) che soddisfano l'equazione

$$f_{xx} + f_{yy} \equiv 0 \qquad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

ESERCIZIO 4.

Stabilire per quali $x_0 \in \mathbf{R}$, se esistono, la soluzione del problema di Cauchy

$$\dot{x} = x^4 - 16, \qquad x(0) = x_0$$

é definita per tutti i tempi.

ESERCIZIO 5. Trovare l'integrale generale di

$$x^{(5)} - 5x^{(4)} + 10x^{(3)} - 10x^{(2)} + 5x' - x = e^t$$