AM2: Tracce delle lezioni- X Settimana

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Equazioni differenziali lineari del I ordine

Date le funzioni $a(x), b(x)$ continue in (a, b) determinare, se esistono, le funzioni $y = y(x)$ di classe $C^1((a, b))$ tali che

$$(ED) \qquad y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad \forall x \in (a, b)$$

(ED) si chiama equazione differenziale nella funzione incognita $y = y(x)$.
Tale equazione é **lineare** perché l'operatore

$$\mathcal{D} : C^1((a, b)) \to C((a, b)), \qquad (\mathcal{D}y)(x) := y'(x) + a(x)y(x)$$

é **lineare**, cioé $\mathcal{D}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 \mathcal{D}y_1 + \alpha_2 \mathcal{D}y_2$. Si dice **del primo ordine** perché nell'equazione compare solo la *derivata prima.*
Tale equazione, se ha soluzione, ne ha infinite . Fissato peró $x_0 \in (a, b)$ (**'punto iniziale'**) e y_0 (**'valore iniziale'**), il problema

$$(PC) \qquad y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad \forall x \in (a, b), \qquad y(x_0) = y_0$$

consistente nel trovare una soluzione di (ED) soddisfacente la **condizione iniziale, o di Cauchy** $y(x_0) = y_0$ ha, come vedremo, una sola soluzione. Tale problema viene chiamato **problema di Cauchy** associato ad (ED).

ESEMPIO. Se $a \equiv 0$ le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = b$ sono le primitive di b. Siccome b **é supposta continua**, le soluzioni di questa equazione sono date, per il Teorema Fondamentale del Calcolo (TFC), da

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)dt$$

ove $x_0 \in (a, b)$ é un punto fissato e y_0 é una costante arbitraria ; si tratta in effetti di una famiglia a un parametro di soluzioni, giacché, se si cambia il 'punto iniziale' x_0 la famiglia di funzioni non cambia.
Tale formula dice che, fissato il 'punto iniziale' x_0, c'é una unica soluzione dell'equazione differenziale data che prende in x_0 il valore y_0, cioé

il Problema di Cauchy (PC) ha una ed una sola soluzione.

Notiamo che condizione necessaria perché $b(x)$ ammetta primitiva é che b abbia la proprietá del valore intermedio (Teorema di Darboux). In particolare, **la continuitá di $b(x)$ é essenziale** .

Soluzione del Problema di Cauchy associato a (ED).

Se y é soluzione di (PC), moltiplicando (ED) per $e^{\int_{x_0}^x a(t)dt}$, troviamo che

$$\left(y(x)e^{\int_{x_0}^x a(t)dt}\right)' = [y'(x) + a(x)y(x)]e^{\int_{x_0}^x a(t)dt} = e^{\int_{x_0}^x a(t)dt} b(x)$$

e quindi, per il TFC, $\quad y(x)e^{\int_{x_0}^x a(t)dt} = y(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^t a(s)ds} b(t)dt \quad$ e quindi

$$y(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} \left[y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^t a(s)ds} b(t)dt \right]$$

Tale espressione, che fornisce al variare del parametro y_0 tutte le soluzioni di (ED), si chiama **Integrale generale** di (ED).

Equazioni differenziali autonome del I ordine:
esistenza, unicitá, tempo di esistenza.

Sia $f \in C((a,b))$. Trovare $x = x(t)$ di classe $C^1(I)$, I intervallo opportuno, tale che

$$(EDA) \qquad \dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad \forall t \in I$$

Tale equazione differenziale del primo ordine si chiama **autonoma** in quanto la variabile indipendente (qui indicata come t) non compare esplicitamente nell'equazione. Una particolare conseguenza di questo fatto é che

se $x(t), t \in (\alpha, \beta)$ é soluzione, allora anche $x(t - t_0), t \in (\alpha + t_0, \beta + t_0)$ é soluzione.

Per questa ragione la condizione di Cauchy si scrive usualmente nella forma $x(0) = x_0$ ed il Problema di Cauchy

$$(PC) \qquad x'(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0$$

ha la seguente interpretazione 'dinamica': la soluzione $x(t)$ di (PC) indica la posizione di un punto mobile (su $\mathbf{R}$) che si muove con velocitá data all'istante t da $f(x(t))$ (la velocitá dipende cioé dalla posizione al tempo t) e che si trovi al tempo 'iniziale' $t = 0$ nella posizione x_0 .

1. $f(x_0) \neq 0$**: Esistenza e unicitá locale**

Determinazione di una soluzione di (PC). Possiamo supporre $f(x_0) > 0$. Siano $a < x_0 < b$ due (eventuali) zeri consecutivi di f, e quindi $f(x) > 0, \quad \forall x \in (a, b)$. É allora definita in (a, b) la funzione

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{f(s)}, \quad x \in (a, b)$$

Ovviamente, $F'(x) = \frac{1}{f(x)}, \quad x \in (a, b)$.
Se $x(t)$ é soluzione di (PC), allora $\frac{d}{dt}F(x(t)) \equiv 1$ e quindi

$$F(x(t)) = t \quad \text{ovvero} \quad x(t) = F^{-1}(t), \quad t \in (F(a), F(b))$$

Siccome

$$\frac{d}{dt}F^{-1}(t) = \frac{1}{F'(F^{-1}(t))} = f(F^{-1}(t)) \quad \forall t \in (F(a), F(b)) \quad \text{e} \quad F^{-1}(0) = x_0$$

(PC) ha una e una sola soluzione in $(F(a), F(b))$**:** $\quad x(t) = F^{-1}(t)$.

2. Equilibri. Se $f(x_0) = 0$, una soluzione é banalmente data dalla funzione costante $x(t) = x_0$ per ogni t . Siccome il 'punto mobile' $x(t)$ non si muove, la posizione x_0 si dice appunto di **equilibrio**.

3. Unicitá/non unicitá locale. Sia x_0 un equilibrio. La soluzione costante,

$$x(t) = x_0 \quad \forall t, \qquad \textit{non é in generale l'unica soluzione:}$$

se x_0 é uno zero isolato di f e l'integrale $\int_{x_0}^{x} \frac{ds}{f(s)}$ esiste in senso generalizzato (e questo accade se $f(x) = O(|x - x_0|^\delta)$ per un $\delta \in (0, 1)$) allora la formula al punto 1 continua a fornire una soluzione (non costante) di (PC). Ed infatti ci sono infinite soluzioni di (PC). Vediamolo con un esempio.

$$\dot{x} = x^{\frac{2}{3}}, \qquad x(0) = 0$$

ha le **infinite soluzioni** $\quad x(t) = (\frac{t-t_0}{3})^3 \chi_{[t_0, +\infty)}, \quad t_0 \geq 0$.

4. Non unicitá per tempi grandi. L'esempio precedente mostra anche come, pur in presenza di una unica soluzione locale (cioé 'per tempi piccoli') l'unicitá puó venire a mancare globalmente (cioé 'per tempi grandi'). Consideriamo il problema

$$\dot{x} = x^{\frac{2}{3}}, \qquad x(0) = -1$$

Qui, con le notazioni usate al punto 1, $\quad f(x) = x^{\frac{2}{3}}$,

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{ds}{s^{\frac{2}{3}}} = 3x^{\frac{1}{3}} + 3, \quad x \in (-\infty, 0), F(-\infty) = -\infty, F(0) = 3$$

Il problema dato ha ha come *unica soluzione in* $(-\infty, 3)$ la funzione

$$x(t) := F^{-1}(t) = (\frac{t-3}{3})^3, \qquad (-\infty, 3)$$

Tale soluzione puó peró essere prolungata su tutto $\mathbf{R}$ nei modi seguenti: fissato $t_0 \geq 3$,

$$x(t, t_0) := (\frac{t-3}{3})^3 \chi_{(-\infty,3)} + (\frac{t-t_0}{3})^3 \chi_{[t_0,+\infty)}$$

Una verifica diretta mostra che queste sono tutte soluzioni del problema di Cauchy dato.

5. Tempi di esistenza. Sia $f \in C(\mathbf{R}), f(x) > 0 \quad \forall x, \quad F(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{f(s)}$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Il problema di Cauchy

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0$$

ha una ed una sola soluzione data da

$$x(t) = F^{-1}(t), \quad t \in (-\int_{-\infty}^{x_0} \frac{ds}{f(s)}, \int_{x_0}^{\infty} \frac{ds}{f(s)})$$

e quindi se $\quad \int_{-\infty}^{x_0} \frac{ds}{f(s)} = \int_{x_0}^{\infty} \frac{ds}{f(s)} = +\infty$

la soluzione é definita per tutti i tempi (la soluzione **esiste globalmente**).

Se invece uno dei due integrali coverge e quindi la soluzione non é definita per tutti i tempi si dice che la soluzione **esplode in tempo finito**. Ad esempio per le seguenti equazioni differenziali

$$(i)\ x' = e^x, \qquad (ii)\ x' = e^{-x}, \qquad (iii)\ x' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

soggette alla condizione iniziale $x(0) = 0$ si ha

(i) $\quad F(x) = 1 - e^{-x}$ e quindi la soluzione $x(t) = -\log(1-t)$ é definita in $(-\infty, 1)$

(ii) $\quad F(x) = e^x - 1$ e quindi la soluzione $x(t) = \log(t+1)$ é definita in $(-1, +\infty)$

(iii) $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+s^2}ds$ e quindi la soluzione é definita per tutti i tempi (infatti $x(t) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \log(x+\sqrt{1+x^2})\right)$).

Sia $f \in C^1(\mathbf{R})$. Se $a < b$ sono due zeri consecutivi di f e $x_0 \in (a,b)$ allora la soluzione di $x' = f(x), \quad x(0) = x_0$ é definita per tutti i tempi perché gli integrali $\int_{x_0}^a \frac{ds}{f(s)}$ e $\int_{x_0}^b \frac{ds}{f(s)}$ divergono entrambi. Ad esempio, nei seguenti problemi

$$(i) \quad x' = \frac{1}{2}(1-x^2), \quad x(0) = 0, \qquad (ii) \quad x' = \frac{1}{2}(1-x^2), \quad x(0) = 2$$

(i) $F(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x \frac{ds}{1-s^2} = \int\limits_0^x \left[\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s}\right] ds = \log\frac{1+x}{1-x}$ e quindi la soluzione $x(t) = \frac{e^t-1}{e^t+1}$ é definita su tutto $\mathbf{R}$

(ii) $F(x) = \frac{1}{2}\int\limits_2^x \frac{ds}{1-s^2} = \log\frac{1}{3}\frac{x+1}{x-1}$ e quindi la soluzione $x(t) = \frac{3e^t+1}{3e^t-1}$ é definita (e decrescente) in $(-\log 3, +\infty)$.

IL PROBLEMA DI CAUCHY

Sia $f \in C(O, \mathbf{R}^n)$, $x \in O \subset \mathbf{R}^n$ aperto. Trovare, se esistono, $\delta > 0$, e una funzione $\gamma \in C^1((-\delta,\delta), O)$ tali che

$$\dot\gamma(t) = f(\gamma(t)) \quad \forall t \in (-\delta,\delta), \qquad \gamma(0) = x \qquad (*)$$

NOMENCLATURA. L'equazione $\dot\gamma(t) = f(\gamma(t))$ é infatti un **sistema di n equazioni differenziali** nelle n (funzioni) incognite $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$:

$$\dot\gamma_i(t) = f_i(\gamma(t)) \quad \forall t \in (-\delta,\delta), \qquad \gamma_i(0) = x_i \qquad i = 1,\ldots,n \qquad (*)$$

La condizione $\gamma(0) = x$ si chiama **condizione iniziale**.

La funzione data f si chiama anche **campo di vettori** in O (i vettori $f(x)$ applicati nei punti $x \in O$). Una soluzione γ é una *curva tangente in ogni suo punto al campo di vettori* f e si chiama anche **curva integrale** del campo. Al variare della condizione iniziale x in O si otterrá una famiglia di curve $\gamma^x(t)$ che si chiamerá **flusso** generato dal campo f.

Dal punto di vista dinamico, f é un **campo di velocitá** e $\gamma(t)$ é, al variare di t, la **traiettoria** di un punto mobile la cui velocitá all'istante t é data da $f(\gamma(t))$ e che si trova nell'istante iniziale $t = 0$ nella posizione iniziale x.

Una formulazione equivalente: esistenza di un di punto fisso per un operatore integrale

Se $\gamma \in C^1(-\delta,\delta),O)$ é soluzione del Problema di Cauchy $(*)$, allora, per il TFC, $\gamma_i(t) = x + \int_0^t f_i(\gamma(\tau))d\tau$, ovvero, con notazione vettoriale,

$$\gamma(t) = x + \int_0^t f(\gamma(\tau))d\tau \qquad t \in (-\delta,\delta) \qquad\qquad (**)$$

ove, se $x \in C([a,b],\mathbf{R}^n)$, intendiamo che

$$\int_a^b x(t)dt := (\int_a^b x_1(t)dt, \dots, \int_a^b x_n(t)dt)$$

Viceversa, se $\gamma \in C(-\delta,\delta),O)$ risolve *l'equazione integrale* $(**)$, allora , di nuovo per il TFC, $\gamma \in C^1(-\delta,\delta),O)$ e soddisfa $(*)$.
Vediamo ora come $(**)$ si riscriva come *equazione di punto fisso per un opportuno operatore integrale.*
Supponiamo che $x \in B_r(x_0)$ con $\overline{B}_{2r}(x_0) \subset O$, cosicché

$$\|\gamma(t) - x\| \le r \quad \forall t \in [-\delta,\delta] \quad \Rightarrow \quad \|\gamma(t) - x_0\| \le 2r \quad \forall t \in [-\delta,\delta]$$

Posto

$$M := \sup_{\xi \in \overline{B}_{2r}(x_0)} \|f(\xi)\|$$

eventualmente rimpicciolendo δ, possiamo supporre che $\delta M < r$ e quindi

$$\gamma([-\delta,\delta]) \subset \overline{B}_r(x) \Rightarrow x + \int_0^t f(\gamma(\tau))d\tau \in \overline{B}_{2r}(x_0) \quad \forall t \in [-\delta,\delta]$$

Con tali scelte di r e δ, la formula

$$(T\gamma)(t) := x + \int_0^t f(\gamma(\tau))d\tau \qquad t \in [-\delta,\delta]$$

definisce un *operatore integrale* T che trasforma $\gamma \in C([-\delta,\delta],\overline{B}_r(x))$ in $T\gamma \in C([-\delta,\delta],\overline{B}_r(x)$ cioé T *manda lo spazio metrico completo* $C([-\delta,\delta],\overline{B}_r(x))$ *in se* e, con la scelta sopraindicata di δ, γ soddisfa $(**)$ se e solo se **é un punto fisso di** T.