AM2: Tracce delle lezioni- VII Settimana

SERIE DI FUNZIONI

INTEGRAZIONE E DERIVAZIONE TERMINE A TERMINE

Siano $a_n \in C([a,b])$ tali che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converga in $[a,b]$,
$S_N(x) := \sum_{n=1}^{N} a_n(x)$ le somme parziali: $S_N(x) \to_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

Teorema 1 (somma di una serie di funzioni continue)

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *converge uniformemente in* $[a,b]$, *allora*

$$S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \quad \textit{é} \quad \textit{continua} \quad \textit{in} \quad [a,b]$$

Infatti $S(x)$ é limite uniforme delle $S_N(x)$ che sono ovviamente funzioni continue.

Teorema 2 (integrazione termine a termine)

Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *converge uniformemente in* $[a,b]$, *allora*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x)dx$$

Infatti, siccome $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n(x) \to_N \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ uniformemente in $[a,b]$, é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b a_n(x)dx \right) = \lim_N \sum_{n=1}^{N} \left(\int_a^b a_n(x)dx \right) = \lim_N \int_a^b \sum_{n=1}^{N} a_n(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \right) dx$$

Teorema 3 (derivazione termine a termine)

Siano $a_n \in C^1((a,b))$.
Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *converge in* (a,b) *e* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ *converge uniformemente in* (a,b) , *allora* $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *é derivabile e*

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n}{dx} \qquad \textit{in} \quad (a,b)$$

Infatti, $S_N \to_N S$ in (a,b), $S_N' = \sum_{n=1}^{N} a_n' \to_N \sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ uniformemente in (a,b) implica che $S \in C^1((a,b))$ e $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = S' = \lim_N S_N' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$.

SERIE TOTALMENTE CONVERGENTI

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ é totalmente convergente in E se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in E} \ |a_n(x)| \ < \ +\infty$$

La convergenza totale implica la (assoluta) uniforme convergenza.

Prova. Intanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge uniformemente in E se e solo se

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge puntualmente
- il resto $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n(x)$ va a zero uniformemente in E

Ora, la totale convergenza implica che, per n grande, si ha

$$|\sum_{j=n}^{\infty} a_j(x)| \ \leq \ \sum_{j=n}^{\infty} |a_j(x)| \leq \sum_{j=n}^{\infty} \sup_{x\in E} \ |a_j(x)| \leq \epsilon \qquad \forall x \in E$$

NOTA. *La convergenza totale é piú forte della convergenza uniforme.* Esempi:

1. Sia $a_n(x) \equiv \frac{(-1)^n}{n} \quad x \in \mathbf{R}$.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge, ovviamente in modo uniforme , ma non é totalmente convergente, perché $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)| = +\infty$.

2. Sia $a_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[n-1,n)}$, cioé $a_n(x) = \frac{1}{n}$ se $x \in [n-1, n)$ ed é zero altrove.

É $\sum_{n=N}^{\infty} a_n(x) \leq \frac{1}{N}$ e quindi la serie converge uniformemente in $\mathbf{R}$, mentre $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{\mathbf{R}} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

ESEMPIO $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad x > 1.$

Siccome $\sup_{x\geq x_0>1} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n^{x_0}}$ la serie converge totalmente in $[x_0, +\infty)$, $\forall x_0 > 1$ (ma non in $(1, 1+\delta]$, perché $\sup_{x>1} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$).
La convergenza non é uniforme in $(1, 1+\delta]$, perché f non é limitata vicino ad 1 (mentre le somme parziali sono ovviamente funzioni limitate). Infatti

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \ \leq \ \frac{1}{n^x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x-1} \ = \ \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^x} \ = \leq \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \qquad \forall x > 1$$

Che la convergenza non sia uniforme segue anche, immediatamente, dalla:

Proposizione . *Siano* $f_n \in C([a,b])$. *Allora:*
$\sum_n f_n$ *converge uniformemente in* $(a,b]$ $\Rightarrow$ $\sum_n f_n(a)$ *converge.*

Prova. $S_n(x) := \sum_{j=1}^n f_j(x)$ é Cauchy uniforme in $(a,b]$, cioé $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| \le \epsilon \ \forall n \ge n_\epsilon, \ p \in \mathbf{N}, \ x \in (a,b]$. Per continuitá si ha quindi

$$|S_{n+p}(a) - S_n(a)| \le \epsilon \quad \forall n \ge n_\epsilon, \ p \in \mathbf{N}$$

ovvero $S_n(a)$ é successione di Cauchy e quindi converge.

Regolaritá: $f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ é $C^\infty((1,+\infty))$. Infatti la serie delle derivate k-esime, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\log n)^k}{n^x}$ é totalmente convergente in $[1+\delta,+\infty)$:

$$x \ge 1+\delta \ \Rightarrow \ \frac{(\log n)^k}{n^x} \le \frac{(\log n)^k}{n^{1+\delta}} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^k}{n^{1+\delta}} < +\infty$$

Integrazione per serie negli integrali impropri:

Siano $a_n \in C((a,b))$, $-\infty \le a < b \le +\infty$. *Se*

(i) $\sum_{n=1}^\infty \int\limits_a^b |a_n(x)|dx < \infty$
(ii) $\sum_{n=1}^\infty a_n(x)$ *converge totalmente in ogni* $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$

allora

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x)dx$$

Siccome $|S_N(x)| \le \sum_{n=1}^\infty |a_n(x)|$, basta mostrare che $\int\limits_a^b \left(\sum_{n=1}^\infty |a_n(x)|\right) dx < \infty$ (equidominatezza). E in effetti, per il Teorema 2, se $[\alpha, \beta] \subset (a,b)$, risulta

$$\int_\alpha^\beta \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta |a_n(x)|\, dx \le \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |a_n(x)|\, dx < +\infty$$

e quindi

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|dx = \lim_{\alpha\to a^+, \ \beta\to b^-} \int_\alpha^\beta \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)|\, dx \le \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |a_n(x)|\, dx < \infty$$

Teorema 4 (convergenza totale nelle serie di potenze).

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *ha raggio di convergenza* r*, allora* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge totalmente in* $[-\bar{r}, \bar{r}]$*,* $\forall \bar{r} < r$.

Infatti, $\sup\limits_{|x|\le \bar{r}} |a_n x^n| = |a_n|\bar{r}^n$ e $\sum_0^{\infty} |a_n|\bar{r}^n < +\infty$.

Teorema 5 (la somma di una serie di potenze é una funzione C^∞)

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n \qquad |x| < r$$

In Particolare, se $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $|x| < r$, allora

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad |x| < r$$

Prova. Le $a_n(x) := a_n x^n$ sono funzioni C^∞ e la serie delle derivate k-esime

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} a_{j+k} x^j$$

é anch'essa serie di potenze ed il suo raggio di convergenza é

$$(\limsup_n |n(n-1)\dots(n-k+1)a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1} = (\limsup_n |a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1}$$

Il carattere C^∞ di $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é allora conseguenza della totale convergenza delle serie di potenze e del teorema di derivazione termine a termine.

ESEMPI. Ricordiamo che $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ sse $|x| < 1$

La convergenza é totale in $[-r, r]$ $\forall r < 1$ (non é uniforme in $[1-\delta, 1]$: la funzione somma della serie non é limitata attorno ad 1!). In particolare, se $|x| < 1$:

(i) $$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!} x^j = \frac{d^k}{dx^k}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \frac{d^k}{dx^k}(\frac{1}{1-x}) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}, \qquad \forall x \in (-1,1)$$

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1}\, dt = \int_0^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}\right] dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\log(1-x)$$

Ad esempio, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \log 2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = \log(1+x)$ $\forall$ $x \in (-1,1)$.

COMPLEMENTI ED ESERCIZI .

1. Criterio di Leibniz. *Se* $0 \leq a_{n+1}(x) \leq a_n(x)\ \forall x \in E,\ n \in \mathbf{N}$, *allora*

$$\sup_{x\in E} a_n(x) \to_{n\to+\infty} 0 \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, a_n(x) \ \textit{converge uniformemente in } E$$

Prova. Intanto, la serie converge puntualmente in E per il criterio di Leibniz per le serie numeriche. La convergenza é anche uniforme perché

$$-a_{2n-1}(x) \leq \sum_{k=2n-1}^{+\infty} (-1)^k a_k(x) \leq 0, \quad a_{2n}(x) \geq \sum_{k=2n}^{+\infty} (-1)^k a_k(x) \geq 0 \quad \forall x \in E \quad \Rightarrow$$

$$|\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k\, a_k(x)| \ \leq \ a_n(x) \to_{n\to+\infty} 0 \quad \text{uniformemente in} \quad E$$

Corollario. *Sia* $a_n \geq a_{n+1} \geq 0 \quad \forall\ n \in \mathbf{N}, \quad \lim_n a_n = 0, \quad \limsup_n \sqrt[n]{a_n} = 1.$ *Allora* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n x^n$ *converge uniformemente in* $[0,1]$ *e quindi*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n x^n \to_{x\to1^-} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

Infatti $a_{n+1}x^{n+1} \leq a_n x^n \quad \forall n,\ \forall x \in [0,1]$ e $a_n x^n \to_n 0\ \forall x \in [0,1]$.

Usando il Corollario, vediamo che

(i) $\log(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \to_{x\to1^-} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$$

Analogamente, da

(ii) $\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x [\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n]\, dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n\, t^{2n}\, dt$ e quindi

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}, \quad |x| < 1$$

e dal fatto che $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}$, converge uniformemente in $[0,1]$, possiamo concludere che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x\to1^-} \arctan x = \frac{\pi}{4}$$

Il Corollario é un caso particolare del

Teorema di Abel *Se* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *converge in* $x=1$, *allora converge uniformemente in* $[0,1]$. *In particolare* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n \to_{x\to 1^-} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Serie di funzioni

(k) La serie $S(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{|\sin(nx)|}{1+n^4x^4}$ converge per ogni $x \in \mathbf{R}$, e la convergenza é totale in $|x| \geq \delta > 0$, perché

$$\sum_{n=0}^{\infty} \max_{|x|\geq\delta} |\frac{\sin(nx)}{1+n^4x^4}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \max_{|x|\geq\delta} \frac{1}{1+n^4x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^4\delta^4} < +\infty$$

La convergenza non é uniforme in $|x| \leq \delta$, perché $\max\limits_{|x|\leq\delta} |\frac{\sin(nx)}{1+n^4x^4}| \geq \sin 1$ se $n \geq \frac{1}{\delta}$, e quindi $\frac{|\sin(nx)|}{1+n^4x^4}$ non converge uniformemente a zero in $|x| \leq \delta$.
Che la convergenza non possa essere uniforme si vede anche dal fatto che $S(x)$ é discontinua in $x=0$. Infatti, $S(\frac{1}{N}) \geq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{\sin(n\frac{1}{N})}{1+\frac{n^4}{N^4}}\right| \geq \frac{\sin(N\frac{1}{N})}{1+\frac{N^4}{N^4}} = \frac{\sin 1}{2}$ mentre $S(0)=0$.

(kk) $\int\limits_1^{+\infty} \left(\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x \log n}\right) dx < +\infty$. Infatti $\int\limits_1^{+\infty} \left(\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x \log n}\right) dx = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{n^x \log n}\right) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n} \left[\frac{e^{-x\log n}}{-\log n}\right]_1^{\infty} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log^2 n} < +\infty$ perché

$$\frac{1}{n\log^2 n} \leq \int\limits_{n-1}^{n} \frac{dx}{x\log^2 x} \Rightarrow \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\log^2 n} \leq \int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\log^2 x} = \left[-\frac{1}{\log x}\right]_2^{\infty} = \frac{1}{\log 2}.$$

(kkk) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^r e^{-nx} = \frac{x^r}{1-e^{-x}}$, $x>0$. La convergenza é totale in $(0,+\infty)$ se $r>1$:

$$(x^r e^{-nx})' = rx^{r-1}e^{-nx} - nx^r e^{-nx} = 0 \Rightarrow x = \frac{r}{n} \Rightarrow \sup_{x\geq 0} x^r e^{-nx} = (\frac{r}{n})^r e^{-r}$$

La convergenza non é uniforme in $(0,+\infty)$ se $r \leq 1$: la serie converge infatti, con somma zero, in $x=0$, mentre $\lim_{x\to 0} f(x) > 0$ se $r \leq 1$.

(kkkk) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{x}{n}$ converge totalmente sui limitati: $|\frac{1}{n} \sin\frac{x}{n}| \leq \frac{|x|}{n^2}$, ma non converge uniformemente in $\mathbf{R}$, perché la successione delle somme parziali $S_N(x) := \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sin\frac{x}{n}$ non é Cauchy uniforme:

$$S_{2N}(N) - S_{N-1}(N) = \sum_{N}^{2N} \frac{1}{n} \sin\frac{N}{n} \geq \sin\frac{1}{2} \sum_{N}^{2N} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2} \sin\frac{1}{2}$$