AM2: Tracce delle lezioni- Settimana XII

SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

Sia $\mathcal{A} = (a_{ij}), \quad i, j = 1, \ldots, n$ matrice $n \times n$. Siccome $\|\mathcal{A}x\| \leq \left(\sum_{ij} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|$ le soluzioni del sistema differenziale lineare di n equazioni nelle n incognite $x_i(t)$

$$(*) \qquad \dot{x} = \mathcal{A}x, \quad \text{ovvero} \qquad \dot{x}_i(t) = a_{i1}x_1(t) + \ldots + a_{in}x_n(t), \quad i = 1, \ldots, n$$

sono definite per tutti i tempi (segue dal Teorema di esistenza globale).

NOTA. Lo stesso vale se $a_{ij} \in C(\mathbf{R})$ (*sistemi lineari a coefficenti variabili*). Infatti ogni sistema non autonomo, ovvero della forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \qquad t \in \mathbf{R} \qquad \text{ove} \quad f \in C^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$$

si puó riscrivere come sistema autonomo nelle nuove incognite $y = (x, s) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$, introducendo un nuovo campo $g \in C^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, \mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$ cosí definito : $g(y) = g(x, s) := (f(x, s), 1)$. Si ha infatti

$$y(t) = (x(t), s(t)) : \quad \dot{y} = g(y(t)), \quad y(t_0) = (x_0, t_0) \qquad \Leftrightarrow$$

$$y(t) = (x(t), t), \quad \text{con} \quad \dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad x(t_0) = x_0$$

In effetti, se $\dot{x} = f(x(t), t), \quad x(t_0) = x_0$ e $y(t) := (x(t), t)$ allora

$$\frac{d}{dt}y(t) = (f(x(t), t)), 1) = g(x(t), t) = g(y(t)) \quad \text{e} \quad y(t_0) = (x_0, t_0)$$

Viceversa, se $y(t) = (x(t), s(t))$ soddisfa il sistema $\dot{y} = g(y(t)), \quad y(t_0) = (x_0, t_0)$, allora $\dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad x(t_0) = x_0$ e $\dot{s}(t) = 1 \quad s(t_0) = t_0$ ovvero $s(t) = t$.
In particolare, se $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$, ove $f \in C^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$ é tale che

$$\forall T > 0 \quad \exists A(T), B(T) > 0 : \qquad \sup_{|t| \leq T} \|f(x, t)\| \leq A(T) + B(T)\|x\| \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

allora $x(t)$ é definita in $\mathbf{R}$. Infatti, se $y(t) = (x(t), t), t < T$, da $\dot{y}(t) = g(y(t))$ segue

$$\|y(t)\| \leq \|y(0)\| + A(T)t + B(T) \int_0^t \|y(\tau)\| d\tau \qquad \forall t < T$$

Per Gronwall, $\{y(t); t \in [0, T)\}$ é insieme limitato e quindi $y(t)$ é prolungabile oltre T. Segue che le soluzioni di $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ sono definite per tutti i tempi .

Proposizione L'insieme di tutte le soluzioni di $(*)$, cioé

$$\mathcal{N} := \{x \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n) : \quad Lx := \dot{x} - \mathcal{A}x = 0\}$$

é un sottospazio linare di $C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$ di dimensione n.

Il fatto, evidente, che **combinazioni lineari** $\alpha x(t) + \beta y(t)$ di soluzioni sia ancora soluzione si traduce nella linearitá dell'insieme delle soluzioni (che é infatti il nucleo dell' operatore lineare L). Poi, dire che $\mathcal{N}$ ha dimensione n equivale a dire che

1. Esistono $x^i \in \mathcal{N}, \quad i = 1, \ldots, n$ **linearmente indipendenti**, cioé esistono n soluzioni x^i tali che $\sum_{i=1}^n c_i x^i(t) = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad c_i = 0 \quad \forall i$.

2. Tali x^i **generano** $\mathcal{N}$: $\forall x \in \mathcal{N}, \quad \exists \quad c = (c_1, \ldots, c_n) : \quad x(t) = \sum_{i=1}^n c_i x^i(t) \quad \forall t$.

Basta prendere x^i nel modo seguente: fissati n vettori $v^i \in \mathbf{R}^n$ linearmente indipendenti , x^i é la soluzione di $(*)$ soddisfacente la condizione iniziale $x^i(0) = v^i$. Chiaramente le x^i sono linearmente indipendenti. Poi, se x é soluzione, siano $c_i \in \mathbf{R}$ tali che $x(0) = \sum_{i=1}^n c_i v^i = \sum_{i=1}^n c_i x^i(0)$ e sia $\hat{x}(t) := \sum_{i=1}^n c_i x^i(t)$. Siccome x e $\hat{x}$ sono soluzioni dello stesso problema di Cauchy, allora $x \equiv \hat{x}$ (per il Teorema di Picard).

Definizione. Un sistema di n *soluzioni linearmente indipendenti* x^i di $(*)$ é **sistema fondamentale** per $(*)$.

Se x^i é sistema fondamentale, $X(t) = (x^1, \ldots, x^n) = (x^i_j(t))_{i,j=1,\ldots,n}$ é **matrice fondamentale**.

Se $X(t)$ é matrice fondamentale e $X(0)$ é la matrice identitá, cioé $X(0) = (e_1, \ldots, e_n)$ ovvero $x^i_j(0) = \delta_{ij}$, X é **matrice principale**.

Se X é matrice fondamentale allora le soluzioni di $(*)$ si scrivono nella forma

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i x^i(t) = X(t)c \qquad c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n \qquad (\textbf{ Integrale Generale })$$

Se X é matrice principale $X(t)c, \quad c \in \mathbf{R}^n$ é la soluzione del problema di Cauchy con condizione iniziale $x(0) = c$. Infine, con ovvie notazioni, $\dot{X} = \mathcal{A}X$.

NOTA. Date n funzioni $x^i \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$, é subito visto che $\exists t_0 :$ *i vettori* $x^i(t_0)$ *sono linearmente indipendenti* $\Rightarrow$ *le funzioni* x^i *sono linearmente indipendenti,* ma il viceversa non é vero, in generale: $x^1(t) = (1, t), x^2(t) = (t, t^2)$ sono chiaramente funzioni linearmente indipendenti, ma $x^2(t) = tx^1(t) \quad \forall t$, cioé, per ogni t, $x^1(t)$ e $x^2(t)$ sono vettori (di $\mathbf{R}^2$) linearmente dipendenti.

Definizione. Date $x^i \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n), i = 1, \ldots, n$ sia $X(t) := (x^i_j(t))$. $W(t) := \det X(t)$ si dice determinante **Wronskiano** delle x^i.

Siccome, dati $v^i \in \mathbf{R}^n, i = 1, \ldots, n,$ come é ben noto

$$v^i \text{ linearmente indipendenti} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^n c_i v^i = 0 \Rightarrow c_i = 0 \quad \forall i \right) \quad \Leftrightarrow \quad \det(v^i_j) \neq 0$$

si ha allora che: $\exists t_0$ tale che $W(t_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^i$ linearmente indipendenti. Il viceversa , come visto in NOTA, é falso in generale, : x^i linearmente indipendenti non implica $\det(x^i_j(t)) \neq 0$ (anche solo per qualche t). Tuttavia

Proposizione Siano $x^i, i = 1, \ldots, n$ soluzioni di $(*)$, $X(t) := (x^i_j(t))$.

$X(t)$ é matrice fondamentale $\Leftrightarrow$ $\det X(t) \neq 0 \quad \forall t$ $\Leftrightarrow$ $(X(t))^{-1}$ esiste $\forall t$

Prova. C'é solo da provare la prima $\Rightarrow$. Supponiamo, per assurdo, che esista t_0 tale che $W(t_0) = 0$ e quindi che i vettori $x^i(t_0)$ siano linearmente dipendenti: esistono c_i costanti non tutte nulle tali che $\sum_{i=1}^n c_i x^i(t_0) = 0$. Ora, se $\hat{x}(t) := \sum_{i=1}^n c_i x^i(t)$, $\hat{x}$ é soluzione che si annulla in t_0, e quindi, per l'unicitá della soluzione del problema di Cauchy, $\sum_{i=1}^n c_i x^i(t) = \hat{x} \equiv 0$, cioé le x^i sono linearmente dipendenti.

SISTEMI LINEARI NON OMOGENEI

Siano $a_{ij}, b_i \in C(\mathbf{R})$, $i, j = 1, \ldots, n$, $\mathcal{A} = (a_{ij})$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Sia X matrice fondamentale per il sistema lineare omogeneo $\dot{x} = \mathcal{A}x$. Sia $\overline{x}$ soluzione del sistema lineare non omogeneo

$$\dot{x} = \mathcal{A}x + b \qquad (**)$$

L'insieme di tutte le soluzioni del sistema lineare non omogeneo é dato da

$$\mathcal{N} + \overline{x} = \{\overline{x} + X(t)c : \quad c \in \mathbf{R}^n\} \qquad \textbf{(integrale generale)}$$

Una soluzione particolare $\overline{x}$ del sistema non omogeneo é data da

$$\overline{x}(t) = X(t) \int_0^t (X(\tau))^{-1} b(\tau) d\tau$$

Infatti, $\frac{d\overline{x}}{dt} = \dot{X} \int_0^t (X(\tau))^{-1} b(\tau) d\tau + X(t)(X(t))^{-1} b(t) = \mathcal{A}X \int_0^t X^{-1} b d\tau + b = \mathcal{A}\overline{x} + b.$
L'integrale generale di $(**)$é dunque dato da

$$x(t) = X \left(b + \int_0^t X^{-1} b d\tau \right) \qquad \textbf{(formula della variazione delle costanti)}$$

SISTEMI A COEFFICENTI COSTANTI : RIDUZIONE A FORMA CANONICA

Sia e_i, $i = 1, \ldots, n$ base canonica di $\mathbf{R}^n$. Sia $\mathcal{D}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := (\lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_n e_n)$ (matrice diagonale avente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ come elementi sulla diagonale principale). Il (piú semplice) sistema differenziale

$$\dot{x} = \mathcal{D}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)x \qquad\qquad x(t) = ((x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

é formato dalle n equazioni disaccoppiate $\quad \dot{x}_i = \lambda_i x_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$
Il sistema ammette quindi le soluzioni $\quad x^i = e^{\lambda_i t} e_i.$
Queste soluzioni sono a Wronskiano diverso da zero e quindi **formano un sistema fondamentale** e ogni soluzione é della forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} e_i = \left(c_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, c_n e^{\lambda_n t}\right), \qquad c_i \in \mathbf{R} \qquad \textbf{(Integrale Generale)}$$

Se $\mathcal{A}$ ha n **autovalori reali distinti**, allora $\mathcal{A}$ **ha una base di autovettori** $v^i \in \mathbf{R}^n$, $i = 1, \ldots, n$. L'Integrale Generale del sistema $\quad \dot{x} = \mathcal{A}x \quad$ si scrive

$$\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} v^i, \qquad c_i \in \mathbf{R}$$

Per provarlo, introduciamo la matrice avente come colonne gli autovettori

$$\mathcal{P} := \left(v^1, \ldots, v^n\right) = \left(v^i_j\right)_{i,j=1,\ldots,n}$$

$\mathcal{P}$ é invertibile e $\quad \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_i = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}v^i = \lambda_i \mathcal{P}^{-1}v^i = \lambda_i e_i \quad$ ovvero
$\lambda_i e_i$ é la i-esima colonna di $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$. Dunque

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P} = (\lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_n e_n) = \mathcal{D}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \qquad (\textbf{forma canonica})$$

Ma allora, se $\quad \dot{x} = \mathcal{A}x \quad$ e $\quad y := \mathcal{P}^{-1}x$, $\quad$ é $\quad x = \mathcal{P}y \quad$ e $\quad \dot{y} = \mathcal{P}^{-1}\dot{x} \quad$ e quindi

$$\dot{y} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}y = \mathcal{D}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)y \qquad \text{e quindi} \qquad y = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} e_i$$

Quindi **l'integrale generale di** $\quad \dot{x} = \mathcal{A}x \quad$ si scrive appunto

$$\mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} v^i$$

In Appendice discuteremo la riduzione a forma canonica nel caso di autovalori multipli e/o complessi.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI ORDINE SUPERIORE

Consideriamo il problema di Cauchy: data $f \in C^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}, \mathbf{R}), t_0 \in \mathbf{R}$, trovare $\delta > 0$ e $y \in C^n((t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ tale che

$$y^{(n)}(t) = f(y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t), t), \qquad t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$$

$$y(t_0) = c_0, \qquad y'(t_0) = c_1, \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad y^{(n-1)}(t_0) = c_n$$

Se y é una soluzione, allora $x_1 := y, x_2 := y', \ldots, x_{n-1} := y^{(n-2)}, x_n := y^{(n-1)}$ risolvono il problema di Cauchy per il sistema differenziale del primo ordine associato

$$\dot{x}_1 = x_2, \ldots\ldots \dot{x}_{n-1} = x_n, \qquad \dot{x}_n = f(x_1, \ldots, x_n, t)$$

$$x_1(t_0) = c_0, \ldots, x_n(t_0) = c_n$$

In particolare il problema di Cauchy dato ha al piú una soluzion, ed ha in effetti esattamente una soluzione ottenuta a partire dalla soluzione del problema di Cauchy per il sistema del primo ordine associato. Si estendono poi in modo ovvio i teoremi di esistenza globale validi per i sistemi del primo ordine. In particolare, se $a_j, j = 1, \ldots n$ sono funzioni continue in I, l'equazione lineare di ordine n

$$(EDL) \qquad y^{(n)}(t) + a_1(t) y^{(n-1)}(t) + \ldots, a_n(t) y(t) = 0$$

ha soluzioni definite in I e tali soluzioni formano un sottospazio lineare di dimensione n di $C^n(I)$. Una base di tale spazio, diciamo $y_1, \ldots, y_n$, si chiama Sistema Fondamentale. Un sistema di n soluzione é un sistema fondamentale se e solo se il Wronskiano

$$W(t) := \det \left(y_j^{(i-1)}(t) \right)_{i,j=1,\ldots,n}$$

é diverso da zero per ogni t (equivalentemente: per qualche t). Se $y_j, j = 1, \ldots, n$ é sistema fondamentale, allora le soluzioni di (EDL) sono tutte e sole le funzioni

$$y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n, \qquad c_j \in \mathbf{R} \qquad \textbf{Integrale Generale}$$

Se a_j sono costanti, e se λ é uno zero reale di molteplicitá q di

$$p(\lambda) := \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n \qquad \textbf{polinomio caratteristico}$$

allora (EDL) ha le q soluzioni

$$y_1 = e^{\lambda t}, \qquad y_2 = t e^{\lambda t}, \quad \ldots \quad y_q = t^{q-1} e^{\lambda t}$$

Se invece $\lambda = \alpha + i\beta$ é uno zero complesso di molteplicitá p (e cosí pure $\overline{\lambda}$) (EDL) ha le $2p$ soluzioni

$$y_1 = e^{\alpha t} \sin \beta t, \qquad y_2 = t e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad \ldots \quad y_p = t^{p-1} e^{\alpha t} \sin \beta t$$

$$\hat{y}_1 = e^{\alpha t} \cos \beta t, \qquad \hat{y}_2 = e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad \ldots \quad \hat{y}_p = t^{p-1} e^{\alpha t} \cos \beta t$$

Si ottiene in questo modo un sistema fondamentale.

COMPLEMENTI

Supponiamo adesso che $\mathcal{A}$ abbia ancora tutti **autovalori distinti**, ma che abbia q **autovalori reali** μ_i, $\quad i = 1, \ldots, q \quad$ **e** $\quad 2p \geq 2$ **autovalori complessi ,** $q+2p = n$ (notiamo che se $\lambda = \alpha + i\beta$ é autovalore complesso allora anche $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ lo é, perché $\mathcal{A}$ é matrice di numeri reali e quindi il suo polinomio caratteristico é a coefficenti reali).
Siano $\lambda_j, \overline{\lambda}_j\, j = 1, \ldots, p$ e $\mu_i, i = 1, \ldots, q$ gli autovalori complessi e, rispettivamente, reali, di $\mathcal{A}$. A tali autovalori corrispondono n autovettori linearmente indipendenti, diciamo v^j, $\overline{v}^j$, $j = 1, \ldots, p, \quad u^i, \quad i = 1, \ldots, q$: notiamo che mentre $u^i \in \mathbf{R}^n$, i v^j sono vettori in $\mathbf{C}^n$ (vettori a componenti complesse) e compaiono in coppie complesse coniugate giacché $\quad \mathcal{A}v^j = \lambda_j v^j \Leftrightarrow \mathcal{A}\overline{v}^j = \overline{\lambda}_j \overline{v}^j \quad$ (la lineare indipendenza sussiste, nei fatti, in $\mathbf{C}^n$). Posto $\xi^j := \Re v^j, \eta^j := \Im v^j$ (ovvero $v^j = \xi^j + i\eta^j, \quad \xi^j, \eta^j \in \mathbf{R}^n$), é

$$\mathcal{A}\xi^j + i\mathcal{A}\eta^j = \mathcal{A}v^j = \lambda_j v^j = (\alpha_j + i\beta_j)\,(\xi^j + i\eta^j) = \alpha_j \xi^j - \beta_j \eta^j + i(\beta_j \xi^j + \alpha_j \eta^j) \Rightarrow$$

$$\mathcal{A}\xi^j = \alpha_j \xi^j - \beta_j \eta^j, \qquad \mathcal{A}\eta^j = \beta_j \xi^j + \alpha_j \eta^j$$

Sia ora

$$\mathcal{P} := \left(\xi^1, \eta^1, \ldots, \xi^p, \eta^p, u^1, \ldots u^q\right)$$

la matrice ($n \times n$ reale) avente le prime $2p$ colonne formate dai vettori parte reale e coefficente dell'immaginario degli autovettori corrispondenti ai λ_i e le rimanenti q colonne formate dagli autovettori reali. Ovviamente tali vettori sono linearmente indipendenti e quindi $\mathcal{P}$ é invertibile. Mostriamo che

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P} =$$

$$(\alpha_1 e_1 - \beta_1 e_2, \beta_1 e_1 + \alpha_1 e_2, \ldots, \alpha_p e_p - \beta_p e_{p+1}, \beta_p e_p + \alpha_p e_{p+1}, \quad \mu_1 e_{2p+1}, \ldots, \mu_q e_n)$$

($\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é qui, come altrove, descritta come n-upla di vettori colonna). É questa la **forma canonica di $\mathcal{A}$ in presenza di autovalori distinti, reali o complessi**.
Verifichiamolo:

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_1 = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\xi^1 = \mathcal{P}^{-1}\left(\alpha_1 \xi^1 - \beta_1 \eta^1\right) = \alpha e_1 - \beta_1 e_2$$

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_2 = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\eta^1 = \mathcal{P}^{-1}\left(\beta_1 \xi^1 + \alpha_1 \eta^1\right) = \beta e_1 + \alpha_1 e_2$$

e cosí via fino alle colonne di posto $2p - 1$ e $2p$.
Per le rimanenti si trova invece $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_{2p+i} = \mu_i e_{2p+i}$.
Posto $y = (x, \xi, \eta) \in \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^p$, il sistema $\quad \dot{y} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}y \quad$ si disaccoppia nelle q equazioni

$$\dot{x}_i = \mu_i x_i \qquad i = 1, \ldots, q$$

e nei p sistemi 2×2

$$\dot{\xi}_j = \alpha_j \xi_j - \beta_j \eta_j, \qquad \dot{\eta}_j = \beta_j \xi_j + \alpha_j \eta_j, \qquad \xi_j, \eta_j \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \qquad j = 1, \ldots, p$$

Posto $\quad z_j(t) := \xi_j(t) + i\eta_j(t), \qquad \dot{z}_j := \dot{\xi}_j + i\dot{\eta}_j,\quad$ il sistema si riscrive come

$$\dot{z}_j = (\alpha_j + i\beta_j) z_j$$

che ha le soluzioni

$$z_j = c \exp(\alpha_j t + i\beta_j t) = c e^{\alpha_j t}(\cos\beta_j t + i \sin\beta_j t), \quad c \in \mathbf{C}$$

Prendendo $c = 1, c = i$ otteniamo coppie di soluzioni in forma reale

$$\xi_j = e^{\alpha_j t}\cos\beta_j t, \qquad \eta_j = e^{\alpha_j t}\sin\beta_j t, \qquad \xi_j = e^{\alpha t_j}\sin\beta_j t, \quad \eta_j = -e^{\alpha_j t}\cos\beta_j t$$

Si ottiengono cosí $2p + q$ soluzioni che, come é immediato verficare, sono a Wronskiano diverso da zero e quindi formano un sistema fondamentale per il sistema in forma canonica e che, applicando $\mathcal{P}$, fornisce un sistema fondamentale per il sistema dato $\dot{x} = \mathcal{A}x$.

Piú in generale, se $\mathcal{P}$ é matrice invertibile e $\quad \sum_{i=1}^n c_i y^i \quad$ é Integrale Generale di $\dot{y} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}y, \quad$ allora

$$\sum_{i=1}^n c_i \mathcal{P} y^i$$

é Integrale Generale di $\quad \dot{x} = \mathcal{A}x$.

Si tratta allora di trovare una matrice $\mathcal{P}$ che riduca $\mathcal{A}$ nella forma piú semplice possibile, la sua **forma canonica**.
Cosí abbiamo proceduto nel caso diagonalizzabile. Si puó procedere in questo modo anche quando, a causa della presenza di autovalori multipli, fosse impossibile diagonalizzare $\mathcal{A}$ (ricordiamo che anche in presenza di autovalori multipli $\mathcal{A}$ puó avere n autovettori linearmente indipendenti e quindi essere diagonalizzabile: é questo il caso se $\mathcal{A}$ é simmetrica).
In tali casi la forma canonica risulterá peró piuttosto complicata (forme di Jordan).

Ci limitiamo a considerare il caso

$\mathcal{A}$ ha **un solo autovalore, reale, cui corrisponde un unico autovettore**.

Cominciamo dalla situazione piú semplice, cioé $n = 2$.
Sia dunque λ zero di molteplicitá 2 (**molteplicitá algebrica** di λ) del polinomio

caratteristico di $\mathcal{A}$, matrice 2×2 . Se la **molteplicitá geometrica** di λ, ovvero $\dim(\ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}))$ é uguale alla molteplicitá algebrica di λ (cioé é 2) cioé a λ corrispondono due autovettori linearmente indipendenti, allora $\mathcal{A}$ é, come sopra, diagonalizzabile.
Supponiamo quindi che λ abbia **un unico autovettore** v. Ció implica che

$$Im\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{J}) = \{h \in \mathbf{R}^2 : \quad \exists u \in \mathbf{R}^2 \quad \text{tale che} \quad \mathcal{A}u - \lambda u = h\}$$

é un sottospazio di dimensione 1: $Im\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{J}) = \{tu : \, t \in \mathbf{R}\}$ per qualche $u \neq 0$. Di piú,

$$Im\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{J}) = \{tv : \, t \in \mathbf{R}\}$$

Questo perché $\mathcal{A}u - \lambda u = tu \Rightarrow \mathcal{A}u - (\lambda + t)u = 0$ e quindi $t = 0$ (λ é l'unico autovalore !) e quindi u é un multiplo di v (v é l'unico autovettore !)
Dunque esiste u tale che $\mathcal{A}u - \lambda u = v$. In particolare, $u \in Ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^2$ ed u si dice **autovettore generalizzato**. Sia ora

$$\mathcal{P} = (v, u)$$

la matrice avente per colonne l'autovettore e l'autovettore generalizzato; ovviamente $\mathcal{P}$ é invertibile. Si ha

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_1 = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}v = \mathcal{P}^{-1}\lambda v = \lambda e_1$$

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_2 = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}u = \mathcal{P}^{-1}(\lambda u + v) = \lambda e_2 + e_1$$

Dunque

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P} = (\lambda e_1, e_1 + \lambda e_2)$$

É questa la **forma canonica** di $\mathcal{A}$. Il sistema associato a $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é

$$\dot{x} = \lambda x + y, \qquad \dot{y} = \lambda y$$

Una soluzione di tale sistema é $y \equiv 0, x = e^{\lambda t}$. Una seconda soluzione é $y = e^{\lambda t}$ e quindi $(xe^{-\lambda t})' = 1$ e quindi $x = te^{\lambda t}$. Tali soluzioni sono a Wronskiano non nullo e quindi formano un sistema fondamentale. Dunque un sistema fondamentale per $\dot{x} = \mathcal{A}x$ é dato da

$$\mathcal{P}\left(e^{\lambda t}e_1\right) = e^{\lambda t}v, \qquad \mathcal{P}\left(te^{\lambda t}e_1 + e^{\lambda t}e_2\right) = te^{\lambda t}v + e^{\lambda t}u$$

Argomenti analoghi si applicano al caso piú generale in cui la matrice $n \times n$ $\mathcal{A}$ **ha un unico autovalore** λ (avente quindi **molteplicitá algebrica** n) avente **molteplicitá geometrica** 1, cioé $\mathcal{A}u = \lambda u$ ha una sola soluzione u_1 (a meno di multipli).

La proprietá chiave (che sussiste in effetti senza ipotesi sulla molteplicitá geometrica di λ e che diamo senza dimostrazione) é la seguente:

$$(!) \qquad Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^n = \mathbf{R}^n \qquad (!)$$

1. Una conseguenza di (!) é che

$$Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k = Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1} \quad \Rightarrow \quad Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k = \mathbf{R}^n$$

Infatti, $u \in Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+2} \Rightarrow 0 = (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+2}(u) = (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}(\mathcal{A}u-\lambda u)$
$\Rightarrow \quad (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k(\mathcal{A}u-\lambda u) = 0 \quad \Rightarrow \quad u \in Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1} = Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k$.

2. Una conseguenza di $dim\,[Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})] = 1$ é che

$$(+) \qquad dim\left[Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}\right] = dim\left[Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k\right] + 1$$

se $Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k$ é sottospazio proprio di $Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}$. Infatti, da

$$\exists u : \qquad (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}(u) = 0, \qquad (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k(u) \neq 0$$

segue

$$0 = (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}(u) = (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k(u) \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k(\alpha u) = u_1$$

per qualche $\alpha \neq 0$. Ugualmente $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}(\overline{u}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k(\beta\overline{u}) = u_1$
per qualche $\beta \neq 0$ e quindi $\alpha u + \beta\overline{u} \in Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k$.
In particolare, da (!) e 1., segue che allora (+) vale per ogni $k < n$.

3. Una conseguenza di 2. é che

$$(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})\left[Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}\right] = Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k$$

Intanto, $u \in Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1} \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k(\mathcal{A}u-\lambda u) = 0$ cioé
$(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})\left[Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}\right] \subset Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k$. Poi, usando 2.,

$$dim\,[Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})] = 1 \Rightarrow dim\left[(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})\left(Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}\right)\right] =$$

$$= dim\left[Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}\right] - 1 = dim\left[Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^k\right]$$

Da 3. segue che esiste u_2 tale che $\mathcal{A}u_2 - \lambda u_2 = u_1$, e poi, iterando, per ogni $k < n$ esiste $u_{k+1} \in Ker\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^{k+1}$ tale che $\mathcal{A}u_{k+1} - \lambda u_{k+1} = u_k$.
Sia ora

$$\mathcal{P} = (u_1, \ldots, u_n)$$

la matrice avente per colonne l'autovettore u_1 e gli **autovettori generalizzati** $u_k \quad k = 2, \dots, n$. Siccome

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_1 = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}u_1 = \mathcal{P}^{-1}\lambda u_1 = \lambda e_1$$

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}e_k = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}u_k = \mathcal{P}^{-1}(\lambda u_k + u_{k-1}) = \lambda e_k + e_{k-1}, \qquad k = 2, \dots, n$$

concludiamo che

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P} = (\lambda e_1, \lambda e_2 + e_1, \dots, \lambda e_n + e_{n-1})$$

ove $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é descritta come riga di vettori colonna. É questa la **forma canonica** per $\mathcal{A}$.

Ora, il sistema differenziale associato a $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é

$$\dot{y}_1 = \lambda y_1 + y_2, \quad \dot{y}_2 = \lambda y_2 + y_3, \quad \dots \quad , \dot{y}_{n-1} = \lambda y_{n-1} + y_n, \qquad \dot{y}_n = \lambda y_n$$

Iterando il calcolo effettuato nel caso $n = 2$ troviamo per tale sistema le n soluzioni

$$(e^{\lambda t} \ , 0 , \dots\dots\dots\dots , \ 0)$$

$$(te^{\lambda t} \ , \ e^{\lambda t}, 0, \dots\dots\dots , \ 0)$$

$$(t^2 e^{\lambda t}, \ te^{\lambda t}, \ e^{\lambda t}, \ 0, \dots \ , \ 0)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(t^{n-1}e^{\lambda t}, t^{n-2}e^{\lambda t}, \dots\dots , e^{\lambda t})$$

Tali n soluzioni hanno Wronskiano evidentemente diverso da zero e quindi formano un sistema fondamentale da cui, applicando $\mathcal{P}$, si ottiene un sistema fondamentale per $\dot{x} = \mathcal{A}x$.