AM2: Tracce delle lezioni- I Settimana

FUNZIONI DI PIÚ VARIABILI

Sia $n \in \mathbf{N}$. Una *funzione reale di n variabili reali* é una funzione

$$f : A \to \mathbf{R}, \qquad A \subset \mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R} \quad n \quad \textit{volte}$$

Se $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ é la base canonica di $\mathbf{R}^n$, un elemento (vettore) di $\mathbf{R}^n$ si scrive $x = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ (x_j = componenti o coordinate di x nella base e_j).
Il *grafico* di f é $\mathcal{G}_f := \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} : \quad x \in A\}$. Ad esempio,

$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \quad = \quad \sum_{j=1}^n a_j x_j$ (**funzione lineare**)

ha per grafico un *sottospazio lineare* ('piano' passante per l'origine $0 := (0, \ldots, 0)$).

Una funzione *vettoriale (o a valori vettoriali)* di n variabili reali é una funzione

$$f : A \to \mathbf{R}^m, \qquad A \subset \mathbf{R}^n, \quad m \in \mathbf{N}$$

$$f : (x_1, \ldots, x_n) \to (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

Le f_j si chiamano le (funzioni) componenti di f.
Se $n = 1$, f si dice anche *curva parametrica o cammino* in $\mathbf{R}^m$.
Ad esempio, dato $x \in \mathbf{R}^m$, $f(t) := tx$ é funzione (lineare) su $\mathbf{R}$ a valori in $\mathbf{R}^m$; la sua immagine $\Im f = \{tx : t \in \mathbf{R}\}$ é la retta in $\mathbf{R}^m$ passante per l'origine e per x (sottospazio lineare *generato* da x).
Un altro esempio: fissato $r > 0$, $f : \theta \to (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $t \in [0, 2\pi)$ é (nel piano) la circonferenza di centro l'origine e raggio r (in forma parametrica).
Piú in generale, una $f : A \to \mathbf{R}^n$, $A \subset \mathbf{R}^k$ é *k-superfice* (parametrica) in $\mathbf{R}^n$.
Ad esempio,

$$f : (\theta, \varphi) \to (R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi), \qquad \theta \in [0, 2\pi), \varphi \in [0, \pi]$$

é sfera (parametrica) di centro l'origine e raggio R in $\mathbf{R}^3$.
Una classe importante: se $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i=1,\ldots,n; j=1,\ldots,m}$ é matrice $n \times m$, si puó definire una funzione di $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$ nel modo seguente

$$L_\mathcal{A} : (x_1, \ldots, x_n) \to (\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j, \ldots, \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j)$$

$L_\mathcal{A}$ é *trasformazione lineare* : $L_\mathcal{A}(tx + sy) = tL_\mathcal{A}(x) + sL_\mathcal{A}(y) \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n, s, t \in \mathbf{R}$; la sua immagine é un sottospazio lineare (di dimensione pari al rango di $\mathcal{A}$).

STRUTTURA ALGEBRICA in $\mathbf{R}^n$: Sia $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ (**addizione**)

$t\,x := (tx_1, \dots, tx_n)\,, \quad \forall \quad t \in \mathbf{R}$ (**moltiplicazione per uno scalare**).

Tali operazioni determinano in $\mathbf{R}^N$ una struttura di **spazio vettoriale (su R)**.

Interpretazione geometrica. Come noto, $\mathbf{R}^2$ si rappresenta mediante i punti di un piano cartesiano Oxy.

In tale piano, dato $v \in \mathbf{R}^2$, l'insieme $\mathbf{R}\,v := \{tv : \ t \in \mathbf{R}\}$ é l'insieme dei punti della retta uscente dall'origine $O := (0,0)$ e passante per v; $\{tv + u : \ t \in \mathbf{R}\}$ é la (rappresentazione parametrica della) retta passante per u e parallela alla retta $\mathbf{R}\,v$.

In particolare, $u + v$ é il punto comune alle rette $\{tu + v : \ t \in \mathbf{R}\}$ e $\{u + tv : \ t \in \mathbf{R}\}$ e si chiama traslazione di u lungo v. Tale interpretazione geometrica si estende al caso generale $n > 2$.

PRODOTTO SCALARE Siano $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$.

$< x, y > := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ é il prodotto scalare tra x e y. Proprietá

positivitá $0 \ \leq < x, x > \ \forall x \in \mathbf{R}^n$ e $< x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$

simmetria $< x, y >=< y, x > \ \forall x, y \in \mathbf{R}^n$

bilinearitá $< ax + by, h >= a < x, h > + b < y, h > \ \forall a, b \in \mathbf{R},\ x, y, h \in \mathbf{R}^n$

STRUTTURA METRICA in $\mathbf{R}^n$: Sia $x = (x_1, \dots, x_n)$.

$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{< x, x >}$ (**norma** di u)

Se $x,\ y \in \mathbf{R}^n$ é $d(x, y) := \|x - y\|$ (**distanza** tra x, y.)

Interpretazione geometrica. Se $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\|u\| := \sqrt{x^2 + y^2}$ é la lunghezza del segmento (o lunghezza del vettore u) che unisce il punto $u = (x, y)$ all'origine , e $d(u, v)$ é la distanza tra i punti u e v.

CAUCHY-SCHWARTZ $| < u, v > | \ \leq \ ||u||\,||v|| \qquad \forall u, v \in \mathbf{R}^n$:

$$0 \leq < u + tv, u + tv >= ||u||^2 + 2t < u, v > + t^2 ||v||^2 \ \forall t \ \Rightarrow < u, v >^2 - ||u||^2\, ||v||^2 \leq 0$$

Proprietá della norma

$(i)\quad ||tu|| = |t|\,||u|| \quad \forall u \in \mathbf{R}^2,\ t \in \mathbf{R}$ (**omogeneitá**)

$(ii)\quad ||u+v|| \le ||u|| + ||v|| \quad \forall u,v \in \mathbf{R}^2$ (**diseguaglianza triangolare**)

La (i) é ovvia, mentre (ii) segue dalla diseguaglianza di Cauchy-Schwartz:
$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 < u, v > \ \le\ \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2$

Proprietá della distanza

$(i)\quad 0 \le d(u,v), \quad \forall u,v \in \mathbf{R}^n \quad d(u,v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = v$ (**positivitá**)

$(ii)\quad d(u,v) = d(v,u) \quad \forall u,v \in \mathbf{R}^n$ (**simmetria**)

$(iii)\quad d(u,v) \le d(u,w) + d(w,v) \quad \forall u,v,w \in \mathbf{R}^n$ (**diseguaglianza triangolare**)

NOTAZIONE. Siano $r > 0$ e $x_0 \in \mathbf{R}^n$. Scriveremo

$$D_r(x_0) := \{x \in \mathbf{R}^n : \ ||x - x_0|| < r\}, \quad D_r := D_r(0)$$

$D_r(x_0)$ (scritta anche $B_r(x_0)$) é la **palla aperta di raggio** r **e centro** x_0. É

$$D_r(x_0) = rD + x_0 := \{rx + x_0 : \ x \in D\} = D_r + x_0 = \{x + x_0 : \ x \in D_r\}$$

SUCCESSIONI CONVERGENTI in $\mathbf{R}^n$ Siano $u_k, u \in \mathbf{R}^n$.

$$u_k \to_k u \quad \Leftrightarrow \quad ||u_k - u|| \to_k 0$$

NOTA. (i) Se $u_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n})$, $u = (x_1, \ldots, x_n)$, allora

$$u_k \to u \ \Leftrightarrow\ ||u_k - u||^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_{k,j} - x_j|^2 \to_k 0 \ \Leftrightarrow\ x_{k,1} \to_k x_1, \ldots, \ x_{k,n} \to_k x_n$$

(ii) u_k converge $\Rightarrow$ $\sup_k \ ||u_k|| < +\infty$ (ma non viceversa)

(iii) $u_k \to u, v_k \to v \quad \Rightarrow \quad tu_k + sv_k \to tu + sv \qquad \forall t,s \in \mathbf{R}$

CONTINUITÁ

Sia $f : A \to \mathbf{R}^m$, $A \subset \mathbf{R}^n$, $x_0 \in A$. f si dice continua in x_0 se

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad x \in A, \|x - x_0\| \le \delta_\epsilon \ \Rightarrow\ \|f(x) - f(x_0)\| \le \epsilon$$

f si dice continua in A se é continua in ogni punto di A. $C(A, \mathbf{R}^n)$ indicherá la classe delle funzioni continue in A a valori in $\mathbf{R}^n$ ($C(A) := C(A, \mathbf{R})$).

Proposizione 1 Sia $f : A \to \mathbf{R}^m$, $u \in A$. Allora
(i) f é continua in u $\Leftrightarrow$ $(u_n \in A, \quad u_n \to_n u \quad \Rightarrow \quad f(u_n) \to f(u))$
(ii) $f = (f_1, \ldots, f_m)$ é continua in u $\Leftrightarrow$ le f_j sono continue in u.

La dimostrazione di (i) é come nel caso $n = m = 1$.
La (ii) segue dal fatto che $f(u_n) \to f(u) \quad \Leftrightarrow \quad f_j(u_n) \to f_j(u)$ per $j = 1, \ldots, m$.

Proposizione 2 Siano $A \subset \mathbf{R}^n$, $f, g : A \to \mathbf{R}^m$ continue in $u \in A$. Allora
(i) $\alpha f + \beta g$ é continua in u $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$
(ii) se $m = 1$, fg é continua in u e, se $g(u) \neq 0$ anche $\frac{f}{g}$ é continua in u
(ii) se $f(A) \subset B$ e $\phi : B \to \mathbf{R}^p$ é continua in $f(u)$, allora $\phi \circ f$ é continua in u.

ESEMPIO IMPORTANTE. **Le funzioni lineari sono continue**.
Una *forma lineare* $l : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ si rappresenta mediante un vettore :

$$l(x) = l(\sum_{j=1}^n x_j e_j) = \sum_{j=1}^n x_j l(e_j) =< x, a > \quad \text{ove} \quad a = (l(e_1), \ldots, l(e_n)).$$

Siccome (Cauchy-Schwartz) $| < x - x_0, a > | \leq \|x - x_0\| \times \|a\|$, l é continua.
Una *trasformazione lineare* $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ si rappresenta mediante una matrice:

$$L(x) = L(\sum_{j=1}^n x_j e_j) = \sum_{j=1}^n x_j L(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j [\sum_{i=1}^m < Le_j, f_i > f_i].$$

(f_i base canonica in $\mathbf{R}^m$). Cioé $L(x) = \mathcal{A}x$ ove $\mathcal{A} = (< Le_j, f_i >)_{i=1,\ldots,m;j=1,\ldots,n}$.
Siccome $\|\mathcal{A}x\|^2 = \sum_{i=1}^m [\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j]^2 \leq \sum_{i=1}^m [\|x\|^2 \sum_{j=1}^n a_{ij}^2] = \|x\|^2 [\sum_{ij} a_{ij}^2]$, e $L(x) - L(x_0) = \mathcal{A}(x - x_0)$, vediamo che L é funzione continua.

ESEMPI: (i) i polinomi in $x_1, \ldots, x_n$, $exp(x_1^2 + \ldots + x_n^2), \sin(x_1 \ldots x_n)$, sono funzioni continue.
(ii) Sia $f(x, y) := \frac{xy^n}{x^2+y^2}$ se $x^2 + y^2 \neq 0$, $f(0, 0) = 0$
Se $n \geq 4$, f é continua in $(0, 0)$: $|2xy| \leq x^2 + y^2 \Rightarrow |\frac{xy^n}{(x^2+y^2)^2}| \leq \frac{y^2|y|^{n-3}}{x^2+y^2} \leq |y|^{n-3}$
Se $n = 3$, f é discontinua in $(0, 0)$ perché $f(x, mx) = \frac{m^3}{(1+m^2)^2}$ $\forall x \neq 0$.
Se $n = 1, 2$, da $f(x, mx) = \frac{m^3}{x^{3-n}(1+m^2)^2}$ segue che f non é limitata attorno a $(0, 0)$, e quindi non é continua in $(0, 0)$ perché g continua in u $\Rightarrow$

$$\exists \delta > 0 : \quad \|g(v)\| \leq \|g(v) - g(u)\| + \|g(u)\| \leq 1 + \|g(u)\| \quad \text{se} \quad \|v - u\| \leq \delta.$$

Notiamo che, fissato y, $x \to f(x, y)$ é continua, e lo é anche $y \to f(x, y)$ per ogni fissato x. e ció quale che sia $n \in \mathbf{N}$. La 'continuitá in x ed y' é quindi una proprietá molto piú debole della 'continuitá nel complesso delle variabili'.