Am120 – Tutorato VI

Integrali funzioni razionali fratte e trigonometrici

Venerdì 9 Aprile 2010
Filippo Cavallari

Esercizio 1 (1) Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\int \sin^{2n} x dx = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \right) x - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2i-1} \prod_{k=i}^{n} \frac{2k-1}{2k} \right) \sin^{2i-1} x \cos x + c$$

$$\int \cos^{2n} x dx = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \right) x + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2i-1} \prod_{k=i}^{n} \frac{2k-1}{2k} \right) \cos^{2i-1} x \sin x + c$$

Suggerimento: procedere per induzione ricordando le formule ricorsive trovate nello scorso tutorato

(2) Trovare delle analoghe formule non ricorsive nel caso in cui l'esponente delle funzioni integrande sia dispari

Suggerimento: può essere utile ricordare la formula del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Esercizio 2 Calcolare i seguenti integrali:

(1) $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx$

(2) $\int \frac{x+1}{x^2-3x+2} dx$

(3) $\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2-x+1} dx$

(4) $\int \frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2} dx$

(5) $\int \frac{x^2+2}{(x-1)^3} dx$

(6) $\int \frac{(x+2)}{x^3-1} dx$

(7) $\int \frac{x^3+2x^2+1}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} dx$

(8) $\int \frac{x^2-1}{(x-2)(1+x^2)} dx$

(9) $\int \frac{5x^2+11x-2}{(x+5)(x^2+9)} dx$

(10) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^4+6x^2+9}} dx$

Esercizio 3 Calcolare il seguente integrale fratto:

$$\int \frac{1}{1+x^4} dx$$

Esercizio 4 (1) Calcolare per parti il seguente integrale fratto:

$$\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx$$

(2) Definiamo $\forall n \geq 1$

$$I_n = \int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}\,dx$$

Dimostrare che:

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)}\left[(2n-3)\,I_{n-1} + \frac{x}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}\right]$$

(3) Calcolare, utilizzando il punto precedente, i seguenti integrali fratti:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\left(7x^2+4x+3\right)^3}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\left(x^2+2\right)^4}\,dx$

Esercizio 5 Utilizzando la sostituzione $t = \tan\frac{x}{2}$ calcolare i seguenti integrali:

(1) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{3\sin x + 4\cos x}\,dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{\tan x}{1-\cos x}\,dx$

Suggerimento: ricordarsi che sussistono le seguenti relazioni

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$