Am1c – Soluzioni Tutorato VII

Integrali per sostituzione e per parti

Mercoledì 22 Aprile 2009

Filippo Cavallari

Esercizio 1

(1) $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = [t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx] = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c$

(2) $\int \frac{1}{\tan x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = [t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx] = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|\sin x| + c$

(3) $\int \pi^x dx = \int e^{x \ln \pi} dx = [t = x \ln \pi \Rightarrow dt = \ln \pi dx] = \frac{1}{\ln \pi} \int e^t dt = \frac{1}{\ln \pi} e^t + c = \frac{\pi^x}{\ln \pi} + c$

(4) $\int \frac{10x^4 + 12x^3 - 8}{2x^5 + 3x^4 - 8x} dx = \left[t = 2x^5 + 3x^4 - 8x \Rightarrow dt = \left(10x^4 + 12x^3 - 8\right) dx \right]$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln\left|2x^5 + 3x^4 - 8x\right| + c$$

(5) $\int \frac{1}{x \ln x} dx = \left[t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x} \right] = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|\ln x| + c$

(6) $\int \frac{1}{\cos x \sin x} dx = \int \frac{dx}{\tan x \cos^2 x} = \left[t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \right] = \int \frac{dt}{t} = \ln|\mathrm{t}| + c = \ln|\tan x| + c$

(7) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x dx = [t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx] = \int t^2 \left(1 - t^2\right) dt$

$$= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + c = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

(8) $\int \frac{\sin^8 x}{\tan x} dx = \int \sin^7 x \cos x dx = [t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx] = \int t^7 dt = \frac{t^8}{8} + c = \frac{\sin^8 x}{8} + c$

(9) $\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = [t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx] = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan t + c = \arctan(\sin x) + c$

(10) $\int e^{3x} \sqrt{1 + e^{3x}} dx = \left[t = e^{3x} + 1 \Rightarrow dt = 3e^{3x} dx \right] = \frac{1}{3} \int \sqrt{t} dt = \frac{2}{9} \sqrt{t^3} + c = \frac{2}{9} \sqrt{\left(e^{3x} + 1\right)^3} + c$

(11) $\int \frac{1}{1 + e^x} dx = \left[x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{dt}{t} \right] = \int \frac{1}{(1+t)t} dt = \int \frac{1 + t - t}{(1+t)t} dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt$

$$= \ln|t| - \ln|1+t| + c = \ln\left|\frac{t}{1+t}\right| + c = \ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right| + c$$

(12) $$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}dx = \left[t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}\right] = 2\int \frac{\ln t}{t}dt = \left[u = \ln t \Rightarrow du = \frac{dt}{t}\right]$$
$$= \int 2udu = u^2 + c = \ln^2 t + c = \ln^2 \sqrt{x} + c$$

(13) $$\int \frac{1-x}{1+\sqrt{x}}dx = \left[t^2 = x \Rightarrow 2tdt = dx\right] = 2\int \frac{1-t^2}{1+t}tdt = 2\int (1-t)tdt = t^2 - \frac{2}{3}t^3 + c = x - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

(14) $$\int x\left(3x^2-7\right)^{11}dx = \left[t = 3x^2-7 \Rightarrow dt = 6xdx\right] = \frac{1}{6}\int t^{11}dx = \frac{t^{12}}{72} + c = \frac{\left(3x^2-7\right)^{12}}{72} + c$$

(15) $$\int \frac{x^2}{\arcsin x^3\sqrt{1-x^6}}dx = \left[t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2dx\right] = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\arcsin t\sqrt{1-t^2}}$$
$$= \left[u = \arcsin t \Rightarrow du = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right] = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + c = \frac{1}{3}\ln|\arcsin t| + c = \frac{1}{3}\ln\left|\arcsin x^3\right| + c$$

(16) $$\int \frac{1}{x + x\ln^2 x}dx = \int \frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}dx = \left[t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}\right] = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + c = \arctan \ln x + c$$

(17) $$\int \frac{\tan^2\sqrt{x} + \tan^4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \left[t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}\right] = 2\int \tan^2 t + \tan^4 tdt = 2\int \tan^2 t\left(1+\tan^2 t\right)dt$$
$$= \left[u = \tan t \Rightarrow du = \left(1+\tan^2 t\right)dt\right] = 2\int u^2du = \frac{2}{3}u^3 + c = \frac{2}{3}\tan^3 t + c = \frac{2}{3}\tan^3\sqrt{x} + c$$

(18) $$\int \frac{\ln(\arctan x)}{\arctan x\left(1+x^2\right)}dx = \left[t = \arctan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{1+x^2}\right] = \int \frac{\ln t}{t}dt = \left[u = \ln t \Rightarrow du = \frac{dt}{t}\right]$$
$$= \int udu = \frac{u^2}{2} + c = \frac{\ln^2 t}{2} + c = \frac{\ln^2 \arctan x}{2} + c$$

Esercizio 2 Ovviamente $\int dx = x + k$. Supponiamo ora che $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$ per un n fissato, e mostriamo che è valido per *n+1*. Integrando per parti si ha:

$$\int x^{n+1}dx = \int x^n xdx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}x - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1}dx$$

Quindi:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\int x^{n+1}dx = \int x^n xdx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}x + k$$

Da cui, infine:

$$\int x^{n+1}dx = \frac{1}{n+2}x^{n+2} + k$$

Esercizio 3

(1) $\int \cos^2 xdx = \sin x\cos x + \int \sin^2 xdx = \sin x\cos x + \int 1-\cos^2 xdx = \sin x\cos x + x - \int \cos^2 xdx$

$$\Rightarrow \int \cos^2 xdx = \frac{\sin x\cos x + x}{2} + c$$

(2) $\int e^x \sin xdx = e^x \sin x - \int e^x \cos xdx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin xdx$

$$\Rightarrow \int e^x \sin xdx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c$$

(3) $\int x^3 \sin xdx = -x^3 \cos x + \int 3x^2 \cos xdx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - \int 6x\sin xdx =$

$$= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x\cos x - \int 6\cos xdx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x\cos x - 6\sin x + c$$

(4) $\int x^4 e^x dx = x^4 e^x - \int 4x^3 e^x dx = x^4 e^x - 4x^3 e^x + \int 12x^2 e^x dx = x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - \int 24xe^x dx =$

$$= x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24xe^x + 24e^x + c$$

(5) $\int x^2 \ln xdx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c$

(6) $\int \arcsin xdx = x\arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin x + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + c$

(7) $\int \arctan xdx = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c$

(8) $\int \ln^2 xdx = x\ln^2 x - 2\int \ln xdx = x\ln^2 x - 2x(\ln x + 1) + c$

Esercizio 4 (1) Integrando per parti si ottiene

$$\int \sin^n xdx = \int \sin^{n-1} x\sin xdx = -\sin^{n-1} x\cos x + \int (n-1)\sin^{n-2} x\cos^2 xdx$$
$$= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\left(1-\sin^2 x\right)dx = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} xdx - (n-1)\int \sin^n xdx$$

Quindi posto $S_n = \int \sin^n xdx$ si ottiene che:

$$S_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}S_{n-2}$$

Ora poiché $S_0 = x + k \quad S_1 = -\cos x + k$, utilizzando la formula ricorsiva trovata, si ottiene per ogni *n* la primitiva che avrà come ultimo termine dell'iterazione C_0 se *n* è pari e C_1 se *n* è dispari.

(2) Integrando per parti si ottiene

$$\int \cos^n x dx = \int \cos^{n-1} x \cos x dx = \cos^{n-1} x \sin x + \int (n-1) \cos^{n-2} x \sin^2 x dx$$
$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \left(1 - \cos^2 x\right) dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x dx - (n-1) \int \cos^n x dx$$

Quindi posto $C_n = \int \cos^n x dx$ si ottiene che:

$$C_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} C_{n-2}$$

Ora poiché $C_0 = x + k \quad C_1 = \sin x + k$, utilizzando la formula ricorsiva trovata, si ottiene per ogni *n* la primitiva che avrà come ultimo termine dell'iterazione C_0 se *n* è pari e C_1 se *n* è dispari.

Esercizio 5 Si. Ad esempio la funzione $f(x) = x$ nell'intervallo $[-1;1]$.

Esercizio 6 Si. Basta considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (a;b] \\ 1 & x = a \end{cases}$$

Infatti siano $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ i punti di una partizione dell'intervallo $[a;b]$ e poniamo

$$m_k = \inf\left\{f(x) : x \in [x_{k-1}; x_k]\right\} \quad M_k = \sup\left\{f(x) : x \in [x_{k-1}; x_k]\right\}$$

Consideriamo le somme integrali

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) \quad S = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$$

Dalla definizione di $f(x)$ si ottiene facilmente che $s = 0$ e $S = x_1$. Dunque, prendendo l'estremo inferiore delle somme integrali superiori, segue che $f(x)$ è integrabile (secondo Riemann) nell'intervallo $[a;b]$ e il suo integrale definito su tale intervallo è nullo.
La risposta alla seconda domanda è invece negativa. Mostriamo infatti che se $f(x) \in C([a;b])$ è non negativa e tale che

$$\int_a^b f(x) dx = 0$$

allora $f(x)$ è identicamente nulla su $[a;b]$. Se, per assurdo, esistesse $\bar{x}\in[a;b]$ tale che $f(\bar{x})>0$ allora, per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno $I_\delta(\bar{x})\subseteq[a;b]$ tale che

$$f(x)\geq\frac{f(\bar{x})}{2}\quad\forall x\in I_\delta(\bar{x})$$

Dunque

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx&=\int_a^{\bar{x}-\delta} f(x)\,dx+\int_{\bar{x}-\delta}^{\bar{x}+\delta} f(x)\,dx+\int_{\bar{x}+\delta}^{b} f(x)\,dx\geq\\&\geq\int_{\bar{x}-\delta}^{\bar{x}+\delta} f(x)\,dx\geq f(\bar{x})\delta>0\end{aligned}$$

che è assurdo.

Esercizio 7 Fissato $k\in\mathbb{N}$ definiamo

$$A_k=\left\{x\in[0;1)\cap\mathbb{Q}:x=\frac{m}{n}\text{ con }m,n\text{ primi tra loro e }n<k\right\}$$

Dato che A_k è un insieme finito possiamo ordinare i suoi elementi $x_1<x_2<\ldots<x_{n_k}$. Segue dalla definizione di A_k che $f(x)>1/k$ per ogni $x\in A_k$, mentre $f(x)\leq 1/k$ per ogni $x\in[0;1)\setminus A_k$. Costruiamo dunque una partizione finita P_k di $[0;1)$ formata da n_k intervalli $I_1,I_2,\ldots,I_{n_k}$, rispettivamente centrati in $x_1,x_2,\ldots,x_{n_k}$ tutti di ampiezza δ_k da fissare, e da altri n_k+1 intervalli $J_1,J_2,\ldots,J_{n_k+1}$, dove risulta $f(x)\leq 1/k$. Detta S_{P_k} la somma integrale superiore e $|J_i|$ l'ampiezza dell'intervallo J_i si ha

$$\begin{aligned}S_{P_k}&=\delta_k\sum_{i=1}^{n_k}\sup_{x\in I_i}f(x)+\sum_{i=1}^{n_k+1}|J_i|\sup_{x\in J_i}f(x)\leq\\&\leq\delta_k\sum_{i=1}^{n_k}f(x_i)+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n_k+1}|J_i|\leq\\&\leq\delta_k\sum_{i=1}^{n_k}f(x_i)+\frac{1}{k}<\\&<\frac{2}{k}\end{aligned}$$

dove l'ultima maggiorazione si ha scegliendo $\delta_k<\dfrac{1}{k\sum_{i=1}^{n_k}f(x_i)}$.

Osservando che le somme integrali inferiori sono nulle e che l'estremo inferiore di quelle superiori è nullo si ha la tesi.

Esercizio 8 Si. Ad esempio la funzione $f(x)=\begin{cases} 1 & x\in[0;1]\cap\mathbb{Q} \\ -1 & x\in[0;1]\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

Esercizio 9 (1) Ricordiamo che $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Dividendo l'intervallo $[0;a]$ in n parti uguali mediante i punti $\frac{a}{n},\frac{2a}{n},...,\frac{(n-1)a}{n}$ si ha che

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a}{n}\left(\frac{ka}{n}\right)^3 \le \int_0^a x^3dx \le \sum_{k=1}^{n}\frac{a}{n}\left(\frac{ka}{n}\right)^3$$
$$\frac{a^4}{n^4}\sum_{k=1}^{n-1}k^3 \le \int_0^a x^3dx \le \frac{a^4}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3$$
$$\frac{a^4(n-1)^2n^2}{4n^4} \le \int_0^a x^3dx \le \frac{a^4n^2(n+1)^2}{4n^4}$$

Dunque, passando al limite, si ha

$$\int_0^a x^3dx = \frac{a^4}{4}$$

(2) Dividendo l'intervallo $[1;a]$ mediante i punti $1<\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{a^2}<...<\sqrt[n]{a^{n-1}}<a$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[n]{a^k}}\left(\sqrt[n]{a^k}-\sqrt[n]{a^{k-1}}\right) \le \int_1^a \frac{1}{x}dx \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[n]{a^{k-1}}}\left(\sqrt[n]{a^k}-\sqrt[n]{a^{k-1}}\right)$$
$$\frac{n}{\sqrt[n]{a}}\left(\sqrt[n]{a}-1\right) \le \int_1^a \frac{1}{x}dx \le n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$$

Dunque, passando al limite, si ha

$$\int_1^a \frac{1}{x}dx = \ln a$$