II Esonero di AM120 - 29/5/2010 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1
Sia $M > 0$. Integrando per parti si ha che

$$\int_0^M e^{-x}\sin x\,dx = -e^{-x}\sin x\Big|_0^M + \int_0^M e^{-x}\cos x dx = -e^{-M}\sin M - e^{-x}\cos x\Big|_0^M - \int_0^M e^{-x}\sin x dx,$$

e quindi

$$\lim_{M\to+\infty}\int_0^M e^{-x}\sin x dx = \lim_{M\to+\infty}[-\frac{1}{2}e^{-M}(\sin M + \cos M) + \frac{1}{2}] = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 2
Dal Teorema di de l'Hôpital si ha che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x - \pi + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{-3}{x^4}} = \frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{3}.$$

Essendo a $+\infty$ l'unico problema, dall'integrabilitá di $\frac{1}{x^3}$ all'infinito e dal criterio del confronto asintotico si ottiene anche l'integrabilitá di $\arctan x - \pi + \frac{1}{x}$ in $(1, +\infty)$.

Esercizio 3
Poiché $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$, si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n(x^2+x+1)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-\frac{3}{4}n} < +\infty,$$

da cui segue la convergenza totale della prima serie su tutto $\mathbb{R}$. La seconda serie rappresenta una serie geometrica di ragione $\frac{x}{(1-x)^2}$, che quindi converge puntualmente in x se e solo se $\frac{|x|}{(1-x)^2} < 1$. Risolvendo $|x| < (1-x)^2$, si ottiene che la serie converge puntualmente in x se e solo se $x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ o $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. La convergenza sará totale (ed uniforme) solo su insiemi della forma $(-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2} - \delta_1] \cup [\frac{3+\sqrt{5}}{2} + \delta_2, +\infty)$, per ogni $\delta_1, \delta_2 > 0$.

Esercizio 4
Poiché

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{2n}dt,$$

dalla convergenza totale della serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n = \frac{1}{1-x^2}$ in $[-1+\delta, 1-\delta]$ per ogni $\delta > 0$ siamo giustificati nello scambiare l'integrale con la serie, ottenendo quindi per $x \in (-1, 1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{x}\int_0^x\frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2x}\int_0^x(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{t+1})dt = \frac{1}{2x}\log\frac{x+1}{1-x}.$$

Esercizio 5
Abbiamo che

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha|x|}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\alpha x}dx = \frac{e^{\alpha\pi}-1}{\alpha\pi}$$

e per $n \neq 0$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha|x|}e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}[\int_{-\pi}^{0} e^{-\alpha x-inx}dx + \int_0^{\pi} e^{\alpha x-inx}dx] = \frac{1}{2\pi}[-\frac{1-(-1)^n e^{\alpha\pi}}{\alpha+in} + \frac{(-1)^n e^{\alpha\pi}-1}{\alpha-in}] \\ &= \frac{1}{2\pi}[(-1)^n e^{\alpha\pi}-1][\frac{1}{\alpha-in}+\frac{1}{\alpha+in}] = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{n^2+\alpha^2}[(-1)^n e^{\alpha\pi}-1]. \end{aligned}$$

Da

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{e^{\alpha y}-1}{y} = \alpha\,, \quad \lim_{y\to 0^-}\frac{e^{-\alpha y}-1}{y} = -\alpha,$$

si ottiene la validitá del test del Dini in $x = 0$. Dal Lemma del Dini si ha che

$$1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n = \frac{e^{\alpha\pi}-1}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+\alpha^2}[(-1)^n e^{\alpha\pi}-1],$$

ossia

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{\alpha\pi}-1}{n^2+\alpha^2} = \frac{\pi}{2\alpha} - \frac{e^{\alpha\pi}-1}{2\alpha^2}.$$