Appello B di AM120 - 28/6/2010 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1
a) Da $g'(x) = 3(x^2 - 2x - 3)$ si ricava che g cresce in $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$. Quindi g ha un massimo locale in -1 con $g(-1) = 8$ e un minimo locale in 3 con $g(3) = -24$. Poiché $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \pm\infty$, si ottiene che esistono tre punti x_1, x_2, x_3 con $x_1 < -1 < x_2 < 3 < x_3$ tali che $\{g(x) \geq 0\} = [x_1, x_2] \cup [x_3, +\infty)$.
b) Dallo studio di $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x^2+3)^2}$, si ottiene la crescenza di $f(x)$ in $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$. La funzione $f(x)$ ha un massimo locale in $x = -1$ con $f(-1) = \frac{1}{2}$ e un minimo locale in $x = 3$ con $f(3) = -\frac{1}{6}$. Dalla derivata seconda $f''(x) = -2\frac{g(x)}{(x^2+3)^3}$, si ottiene la convessitá di $f(x)$ in $(-\infty, x_1] \cup [x_2, x_3]$. Inoltre la funzione ha un asintoto orizzontale $y = 0$ a $\pm\infty$ in quanto $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Da tali informazioni si puó tracciare un grafico della funzione $f(x)$.

Esercizio 2
Dal Teorema di de l'Hôpital, basta studiare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin^2(2x)\cos(2x)}{1 - \cos(2x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin^2(2x)}{(2x)^2} \frac{(2x)^2}{1 - \cos(2x)} \cos(2x) = 2.$$

Esercizio 3
Con la sostituzione $t = \tan x$ otteniamo che

$$\int \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x} dx = \int \frac{dt}{(1 + 2t^2)(1 + t^2)}\Big|_{t = \tan x} = \int [\frac{2}{1 + 2t^2} - \frac{1}{1 + t^2}] dt\Big|_{t = \tan x} = \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}\tan x) - x.$$

Esercizio 4
Da

$$\lim_{x \to 0} \frac{xe^x}{(x^4 + 1)\sinh x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sinh x} = \lim_{x \to 0} \frac{2xe^x}{e^{2x} - 1} = 1,$$

si ottiene che l'unico problema per l'integrabilitá di $\frac{xe^x}{(x^4+1)\sinh x}$ in $(-\infty, +\infty)$ risulta essere all'infinito. Siccome

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{\sinh x} = 0 \,, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\sinh x} = 2,$$

si ottiene che esiste $C > 0$ tale che

$$|\frac{e^x}{\sinh x}| \leq C \qquad \text{in } (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

Quindi

$$|\frac{xe^x}{(x^4 + 1)\sinh x}| \leq \frac{C}{|x|^3} \qquad \text{in } (-\infty, -1] \cup [1, +\infty),$$

e dal Teorema del confronto otteniamo l'integrabilitá di $\frac{xe^x}{(x^4+1)\sinh x}$ in $(-\infty, +\infty)$.

Esercizio 5
Si ha che

$$\sum_{n=1}^{N} a_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{N+1} \\ \sin^2(\frac{\pi}{x}) & \text{se } \frac{1}{N+1} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

e quindi per ogni $x \in (0,1]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sin^2(\frac{\pi}{x}).$$

Inoltre, da

$$\sum_{n=N}^{N+M} a_n(x) = \begin{cases} \sin^2(\frac{\pi}{x}) & \text{se } \frac{1}{N+M+1} \leq x < \frac{1}{N+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

si ottiene che per $x_N = \frac{1}{N+\frac{3}{2}}$ e $M \geq 1$

$$\sup_{(0,1]} |\sum_{n=N}^{N+M} a_n(x)| = 1$$

che non tende a zero per $N \to +\infty$. Non si ha quindi convergenza uniforme in $(0,1]$. Dato $0 < \delta \leq 1$, si ha invece che per $N > \frac{1}{\delta} - 1$

$$\sup_{[\delta,1]} |\sum_{n=N}^{N+M} a_n(x)| = 0,$$

e si ha quindi convergenza uniforme in $[\delta, 1]$.