# Appello A di AM120 - 15/6/2010 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

**Esercizio** 1

Poiché $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, la funzione puó essere estesa con continuitá in zero ponendo $f(0) = 0$. Essendo una funzione continua sul compatto $[0,5]$, ammette punti di minimo assoluto $x_m$ e massimo assoluto $x_M$ in $[0,5]$. Abbiamo che $f'(x) = 4 + \log x$ ha segno positivo se e solo se $x > e^{-4}$. Ossia $f$ decresce in $[0, e^{-4}]$ e cresce in $[e^{-4}, 5]$. Quindi

$$\min_{(0,5]} f(x) = \min_{[0,5]} f(x) = f(e^{-4}) = -e^{-4}$$

e

$$\max_{(0,5]} f(x) = \max_{[0,5]} f(x) = f(5) = 15 + 5\ln 5$$

poiché $f(5) > 0 = f(0)$.

**Esercizio** 2

Osserviamo che basta studiare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^{x^2} - \cos x}{x^4}.$$

Poiché $(a^{x^2})' = (e^{x^2 \log a})' = 2x \log a a^{x^2}$, dall'uso ripetuto del Teorema di de l'Hôpital si ha che

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^{x^2} - \cos x}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\log a a^{x^2} + \sin x}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2\log a a^{x^2} + 4x^2 \log^2 a a^{x^2} + \cos x}{12x^2}.$$

Affinché il limite esista finito, dobbiamo avere che $2\log a + 1 = 0$, ossia $a = e^{-\frac{1}{2}}$. Con tale scelta di $a$, dal Teorema di de l'Hôpital otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} + \cos x}{12x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3xe^{-\frac{x^2}{2}} - x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} - \sin x}{24x} = \frac{1}{12}.$$

**Esercizio** 3

Dallo studio di $f'(x) = (x^2+4x+2)e^x$, si ottiene la crescenza di $f(x)$ in $(-\infty, -2-\sqrt{2}] \cup [-2+\sqrt{2}, +\infty)$. Dalla derivata seconda $f''(x) = (x^2 + 6x + 6)e^x$, si ottiene la convessitá di $f(x)$ in $(-\infty, -3-\sqrt{3}] \cup [-3+\sqrt{3}, +\infty)$. Inoltre la funzione ha un asintoto orizzontale a $-\infty$ e nessun asintoto a $+\infty$ in quanto $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Da tali informazioni si puó tracciare un grafico della funzione $f(x)$.

**Esercizio** 4

Da $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$, si ottiene che

$$\sin(x^3) - \sin^3 x = x^3 + O(x^9) - x^3 + \frac{x^5}{2} + O(x^7) = \frac{x^5}{2} + O(x^7)$$

e

$$\cos(x^3) - \cos^3 x = 1 + O(x^6) - 1 + \frac{3}{2}x^2 + O(x^4) = \frac{3}{2}x^2 + O(x^4).$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^3) - \sin^3 x}{x^3(\cos(x^3) - \cos^3 x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^5}{2} + O(x^7)}{\frac{3}{2}x^5 + O(x^7)} = \frac{1}{3}.$$

**Esercizio** 5

Poiché $\log(1+\frac{x}{n}) \leq \frac{x}{n}$ otteniamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \sqrt[n]{1+\frac{x}{n}} \leq x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Dal Teorema del confronto la serie converge puntualmente in $[0,+\infty)$. Inoltre, da

$$\sup_{[0,M]} \log(1+\frac{x}{n}) = \log(1+\frac{M}{n})$$

otteniamo che la serie converge totalmente in $[0,M]$ per ogni $M>0$.

**Esercizio** 6

L'unico problema per l'integrabilitá di $\frac{x}{(x^x-1)^2}$ in $(0,1)$ risulta essere in $x=0$ e $x=1$. Siccome

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\log^2 x}{(x^x-1)^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x\log x)^2}{(e^{x\log x}-1)^2} = 1\ , \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2\log^2 x}{(x^x-1)^2} = 1,$$

otteniamo che esiste $C>0$ tale che $\frac{x}{(x^x-1)^2} \leq \frac{C}{x\log^2 x}$. Dal Teorema del confronto basta studiare l'integrabilitá di $\frac{1}{x\log^2 x}$ in $x=0$ e $x=1$. Poiché

$$\int_{\epsilon}^{1-\delta} \frac{dx}{x\log^2 x} = -\frac{1}{\log x}\Big|_{\epsilon}^{1-\delta} = -\frac{1}{\log(1-\delta)} + \frac{1}{\log \epsilon} \to +\infty$$

per $\epsilon,\delta \to 0^+$, otteniamo che $\frac{x}{(x^x-1)^2}$ non risulta essere integrabile in $(0,1)$.