

ST1- 1 ESONERO: 16-4-2008 (Orlandi)

Esercizio 1 (6 punti) Siano X e Y due variabili aleatorie con distribuzione uniforme sull'insieme dei punti con coordinate intere in $S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 7; x \leq y \leq x + 2\}$. La funzione di densità di probabilità discreta congiunta è quindi $f(x, y) = \frac{1}{24}$, per $(x, y) \in S$. Trovare

- (1) le densità marginali $f_X(\cdot)$ e $f_Y(\cdot)$,
- (2) la $f_{Y|X}(y|x)$, densità discreta condizionata di Y rispetto a X ,
- (3) La media di Y condizionata a $X = x$, $E[Y|x]$
- (4) La varianza di Y condizionata a $X = x$, $var(Y|x)$.

Esercizio 2 (10 punti) Sia (X_1, X_2, \dots, X_n) , $n \in N$, un campione casuale estratto da una distribuzione di Bernoulli, di parametro $p \in (0, 1)$.

- (1) Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza $T := T_n$ per p .
- (2) È uno stimatore non distorto? (motivare)
- (3) Determinare l'errore quadratico medio.
- (4) È lo stimatore trovato T una statistica sufficiente? (Si scriva cosa si intende per Statistica Sufficiente e si verifichi che T lo sia quando $n = 2$).
- (5) Si consideri la successione degli stimatori T_n al variare della lunghezza del campione n , $\{T_n\}_n$. Si dica cosa si intende per successione di stimatori *semplicemente consistenti* e si verifichi che $\{T_n\}_n$ lo sia.
- (6) Si determini lo stimatore di massima verosimiglianza V per la varianza della distribuzione di Bernoulli.
- (7) È V non distorto? (motivare)
- (8) Trovare il valore di c affinché cV sia uno stimatore non distorto della varianza della distribuzione di Bernoulli.

Esercizio 3 (8 punti) Sia (X_1, X_2, \dots, X_n) , $n \in N$, un campione casuale estratto da una distribuzione esponenziale con densità di probabilità $f(x, \theta) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}$ per $x \in R^+$, $\theta > 0$.

- (1) Trovare lo stimatore T di massima verosimiglianza per θ .
- (2) Determinare se T non è distorto.
- (3) Determinare l'errore quadratico medio di T .
- (4) Determinare la funzione di distribuzione di probabilità di

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Esercizio 4 (6 punti) Sia (X_1, X_2, \dots, X_n) un campione casuale estratto da una distribuzione con densità di probabilità $f(x, \theta) = \theta x^{(\theta-1)}$, per $x \in (0, 1)$, $\theta > 0$. Determinare lo stimatore T di θ con il metodo dei momenti.