Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009

GE4 - Geometria differenziale 1

Esercizi - Alvin (20-10-2008)

Esercizio 1. (Do Carmo, p. 80 es 7) Dimostrare che la relazione "S_1 è diffeomorfa ad S_2" è una relazione d'equivalenza sull'insieme delle superfici regolari.

Esercizio 2. Sia $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la sfera unitaria e sia $A : S^2 \longrightarrow S^2$ l'applicazione antipodale, ovvero $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$. Mostrare che A è un diffeomorfismo.

Esercizio 3. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e $\pi : S \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione che associa ad ogni $p \in S$ la sua proiezione ortogonale sul piano orizzontale $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$. Stabilire se π è differenziabile. Per quali punti il differenziale $d\pi_p$ è un'isomorfismo lineare?

Esercizio 4. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $d : S \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $d(p) = |p - p_0|$, dove $p \in S$, $p_0 \in \mathbb{R}^3$, $p_0 \notin S$; cioè d è la distanza di p da un punto fissato p_0 non in S. Mostrare che d è differenziabile.

Esercizio 5. Mostrare che il catenoide $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \cosh^2 z\}$ è diffeomorfo al cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$, esibendo un diffeomorfismo.

Esercizio 5. Dimostrare che, date due superfici regolari S_1, $S_2 \subset \mathbb{R}^3$, un'applicazione $f : S_1 \longrightarrow S_2$ è un diffeomorfismo se e solo se f è liscia, biiettiva, e il suo differenziale df_p è un'applicazione lineare invertibile $\forall p \in S_1$

Esercizio 6. Ricordiamo che data una funzione liscia su una superficie $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ e $p \in \Sigma$, la derivata $df_p : T_p\Sigma \to \mathbb{R}$ è definita come

$$df_p(\dot{\gamma}(t)) = \frac{d}{dt}(f(\gamma(t)))_{t=0}$$

per ogni curva liscia $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Sigma$. Dimostrare che f è una funzione costante se e solo se $df_p = 0$ per ogni p.

Esercizio 7. L'immagine dell'applicazione

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u\cos v, u\sin v, v) \end{aligned}$$

è una superficie regolare detta Elicoide.
(7.1) Dimostrare che $\mathbf{x}$ è una carta locale e determinare $T_p\Sigma$ al variare di p.
(7.2) Notare che la proiezione ortogonale $\pi : \Sigma \to \mathbb{R}^2$ sul piano orizzontale non è iniettiva e quindi π non è un diffeomorfismo.
(7.3) Per quali punti $p \in \Sigma$ la proiezione ortogonale π è un diffeomorfismo locale? [*Suggerimento.* π è un diffeomorfismo locale in p, se e solo se la sua derivata $d\pi$ in p è un isomorfismo lineare, se e solo se $T_p\Sigma$ non contiene il vettore verticale $k = (0, 0, 1)$.]