Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2008/2009

GE4 - Geometria differenziale 1

Esercizi - Alvin (20-10-2008)

<u>Esercizio 1.</u> Per ogni coppia di numeri reali $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ fissati, sia

$$\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

l'elica che al variare di $t \in \mathbb{R}$ si avvolge sul cilindro circolare retto in $\mathbb{R}^3$ di equazione $x^2 + y^2 = a$.
(1.1) Calcolare curvatura e torsione della curva $\gamma(t) \subset \mathbb{R}^3$ e osservare che non dipendono da t.
(1.2) Dimostrare che una curva in $\mathbb{R}^3$ ha curvatura e torsione costanti se e solo se è contenuta in una retta, in un cerchio o in un'elica cilindrica.

<u>Esercizio 2.</u> Quali delle seguenti applicazioni $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sono carta locale (parametrizzazione) di una superficie regolare? Giustificare attentamente.
(2.1) $X(u, v) = (u, uv, v)$
(2.2) $X(u, v) = (u^2, u^3, v)$
(2.3) $X(u, v) = (u, u^2, v + v^3)$

<u>Esercizio 3.</u> (Do Carmo, p.65 es.4) Sia $f(x, y, z) = z^2$. Mostrare che 0 non è un valore regolare di f ma $f^{-1}(0)$ è una superficie regolare.

<u>Esercizio 4.</u> Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione liscia e supponiamo che $1 \in \mathbb{R}$ sia un valore regolare cosicché $\Sigma := \{p \in \mathbb{R}^3 \,:\, f(p) = 1\}$ è una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$.
(4.1) Mostrare che per ogni curva $\alpha : I \to \Sigma$ si ha che $f \circ \alpha : I \to \mathbb{R}$ è la funzione costante $f(\alpha(t)) = 1$ e quindi la sua derivata è nulla.
(4.2) Dedurre che per ogni punto $p \in \Sigma$ il piano tangente $T_p\Sigma$ coincide (a meno di una traslazione) con il piano $Ker\{df_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\}$, dove df_p è la derivata di f in $p \in \mathbb{R}^3$
(4.3) Usare il punto precedente per dimostrare che il piano tangente alla sfera S nel polo sud $s = (0, 0, -1)$ ha equazione $z = -1$
(4.4) Sia ora f la funzione liscia definita da $f(p) := \|p\|^2 =< p, p >$, ovvero $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Mostrare che $1 \in \mathbb{R}$ è un valore regolare di f e che il piano tangente T_pS è il piano di $\mathbb{R}^3$ ortogonale al vettore posizione di $p \in \mathbb{R}^3$.

<u>Esercizio 5.</u> Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$S_a := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = a + z^2\}$$

è una superficie regolare? Giustificare attentamente la risposta e disegnare S_a per almeno un valore del parametro a.

<u>Esercizio 6.</u> Considerare la seguente funzione di tre variabili

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \longmapsto & z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 \end{array}$$

(6.1) Trovare l'aperto massimale $U \subset \mathbb{R}^3$ in cui F è liscia, cioè di classe C^∞ e descrivere geometricamente il suo complementare: $\mathbb{R}^3 \setminus U$.

(6.2) Scrivere il campo gradiente ∇F e trovare i punti critici di F.
(6.3) Sia Σ il sottoinsieme dello spazio Euclideo

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 = 1\}$$

Dimostrare che Σ è una superficie liscia.
(6.4) Dimostrare che Σ è compatta, cioè un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^3$.
(6.5) Dimostrare che l'applicazione

$$\begin{aligned} X : (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \qquad &\longmapsto X(u, v) \end{aligned}$$

con $X(u, v) = ((\cos v + 3)\cos u, (\cos v + 3)\sin u, \sin v)$, è una carta locale su Σ. Descrivere $Im(X) \subset \Sigma$.

<u>Esercizio 7.</u> (Do Carmo, p.66 es.7) Sia $f(x, y, z) = (x + y + z - 1)^2$.
(7.1) Trovare punti critici e valori critici di f.
(7.2) Per quali valori di c l'insieme $S_c := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ f(x, y, z) = c\}$ è una superficie regolare?
(7.3) Rispondere ai punti precedenti per la funzione $f(x, y, z) = xyz^2$