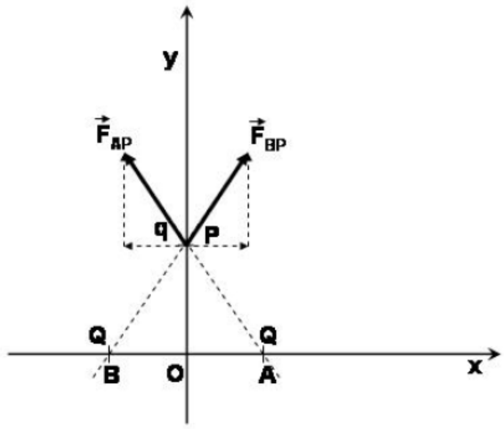
Esercizio 1

Due cariche positive uguali di carica Q = 5 10^{-4} C sono fissate rispettivamente nei punti di coordinate A= (1 m, 0) e B= (-1m,0) di un sistema di assi cartesiani x,y. Si calcoli :

a) Modulo, direzione e verso della forza che agisce su una carica positiva q = 10^{-6} C che si trova nel punto P= (0, 1m);

b) Il campo elettrico ed il potenziale elettrico nell'origine degli assi cartesiani;



La forza elettrostatica totale che agisce sulla carica q posta in P è data dalla somma vettoriale delle forze di Coulomb F_{AP} ed F_{BP}, come disegnato in figura. Essendo le distanze $|AP|$ e $|BP|$ uguali, tali forze hanno la medesima intensità

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{|AP|^2}$$

Come mostrato in figura, tali forze hanno la stessa proiezione sull'asse y e proiezioni uguali ed opposte sull'asse x.
Da ciò segue che la forza elettrostatica totale è un vettore diretto lungo l'asse y di intensità pari alla somma delle componenti y di ciascuna forza:

$$F_{tot} = 2\times\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{|AP|^2}\cos 45^0\right) = 2\times\left(9\times10^9\,\frac{5\times10^{-4}\times10^{-6}}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{N} = 3.18\,N$$

ossia:

$$\vec{F}_{tot} = (3.18\,N)\,\vec{j}$$

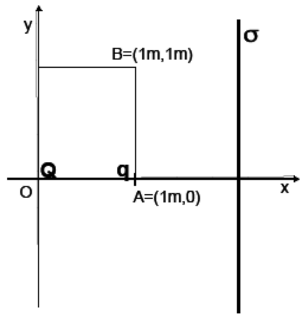
b) Il campo elettrostatico nell'origine degli assi è nullo, dato che i campi prodotti da ciascuna carica Q nel punto O hanno stessa intensità

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|OA|^2}$, stessa direzione e versi opposti.

Il potenziale in O è dato dalla somma dei potenziali elettrostatici:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|OA|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|OB|} = 2\times\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|OA|} = 2\times\left(9\times10^9\times\frac{5\times10^{-4}}{1}\right)V = 9\times10^6\,V$$

Esercizio 2



Una lamina piana infinita uniformemente carica con densità superficiale **σ = + 2 10^{-12} C/m^2** si trova a distanza **h=2m** da una carica positiva **Q**, posta nell' origine O del sistema di assi cartesiani, come mostrato in figura. Nel punto di coordinate **A = (1m, 0)** viene posta una carica **q = + 10^{-12} C**. Determinare:

a) il campo elettrico prodotto dalla lamina nel punto ove si trovano le cariche Q e q (specificandone modulo direzione e verso) ed il valore della carica Q tale che la carica q si trovi all'equilibrio nel punto A;
b) il lavoro totale delle forze elettrostatiche per spostare la carica q dal punto **A=(1m.0)** al punto **B=(1m,1m).** Si assuma per Q il valore calcolato al punto a).
[N.B. $\varepsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}$ C^2/Nm^2]

La lamina piana infinita produce un campo elettrico uniforme e perpendicolare alla lamina stessa, con verso uscente dalla lamina, essendo la lamina carica positivamente.

Il campo vale in modulo $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \dfrac{2\times10^{-12}\,C/m^2}{2\times8.85\times10^{-12}\,C^2/Nm^2} = 0.11\,N/C$

Nella regione di spazio a sinistra della lamina, ove si trovano le cariche Q e q, il campo vale quindi:

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i} = -0.11\,N/C \quad \vec{i}$$

La carica q, posta a distanza d da Q, sarà in equilibrio se le forze elettrostatiche prodotte dalla carica Q e dalla distribuzione piana sono uguali in modulo, ossia:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{d^2} = q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{d^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

da cui si ottiene il valore di Q:

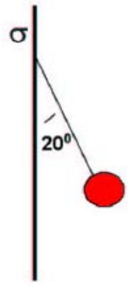
$$Q = (4\pi\varepsilon_0)\times\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\times d^2 = \frac{1}{9\times10^9\,Nm^2/C^2}\times0.11\frac{N}{C}\times(1m)^2 \approx 0.012\times10^{-9}\,C = 12\,pC$$

b) Il lavoro totale fatto dalle forze elettrostatiche è dato dalla somma del lavoro L_Q fatto dalla forza di Coulomb generata dalla carica Q e dal lavoro L_σ dovuto alla forza elettrostatica prodotta dalla lamina piana. Quest'ultimo è identicamente nullo lungo il percorso AB, essendo la forza sempre perpendicolare allo spostamento.

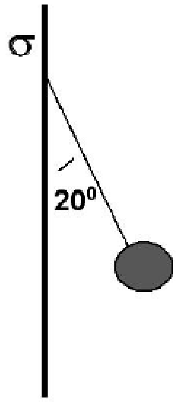
Pertanto:

$$\begin{aligned} L_{tot} &= L_Q + L_\sigma \\ &= L_Q = -\Delta U = U_A - U_B \\ &= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \\ &= (9\times10^9\,Nm^2/C^2)(10^{-12}\,C\times12\ 10^{-12}\,C)\left(\frac{1}{1m} - \frac{1}{\sqrt{2}m}\right) \\ &= 31.6\times10^{-15}\,J \end{aligned}$$

Esercizio 3



Una pallina carica di plastica di massa $m = 5.00\ g$ é sospesa ad un filo di lunghezza $L = 10.0\ cm$. Il filo é vincolato ad una superficie piana infinitamente estesa e con densità di carica superficiale $\sigma = +20\ nC/m^2$, come mostrato in figura. Se all'equilibrio il filo forma un angolo di 20° con la superficie piana, quale é la carica elettrica della pallina ? [N.B. $\varepsilon_0 = 8.8510^{-12} C^2/Nm^2$]



La superficie piana infinita genera un campo elettrico uniforme perpendicolare alla superficie, con verso uscente e intensità

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{20\times10^{-9} C/m^2}{2\times 8.85\times10^{-12} C^2/Nm^2} = 1.13\times10^3 N/C$$

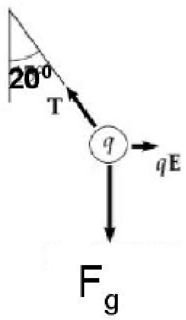
All'equilibrio:

$$\vec{F}_{net} = \vec{T} + \vec{F}_g + \vec{F}_e = 0$$

Proietto tale equazione sugli assi:

$$(F_{net})_x = -T\sin 20^0 + qE = 0$$

$$(F_{net})_y = T\cos 20^0 - mg = 0$$



Ricavo la tensione T dalla equazione in y:

$$T = \frac{mg}{\cos 20^0} = \frac{(5.00\times10^{-3}kg)(9.8m/s^2)}{\cos 20^0} = 5.21\times10^{-2} N$$

e quindi q dalla equazione in x:

$$q = \frac{T\sin 20^0}{E} = \frac{(5.213\times10^{-2}N)\sin 20^0}{1.13\times10^3 N/C} = 15.7\times10^{-6} C$$

Esercizio 4

Una goccia sferica di mercurio (conduttore), sulla cui superficie è distribuita uniformemente una carica $Q_1 = 3.2 \cdot 10^{-11}$ C, ha un potenziale V_1 di 512 V, avendo posto uguale a zero il potenziale all'infinito. a) Calcolare il raggio R_1 della goccia;
b) Se due gocce identiche alla precedente (stessa carica e stesso raggio), si uniscono per formare un'unica goccia sferica di raggio R_2, quale sarà il potenziale V_2 della nuova goccia ?

(a) Il potenziale di un conduttore sferico è $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$, da cui $R_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{V_1} = 9.0 \cdot 10^9 \frac{3.2 \cdot 10^{-11}}{512} = 0.54$ mm.
(b) Dopo l'unione la nuova goccia ha carica $Q_2 = 2Q_1$. Il volume è doppio, per cui si può scrivere $\frac{4}{3}\pi R_2^3 = 2\frac{4}{3}\pi R_1^3$, da cui si ottiene $R_2 = R_1\sqrt[3]{2}$. Il potenziale della nuova goccia è perciò $V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q_1}{R_1\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}}V_1 = 813$ V.

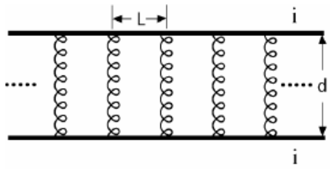
Esercizio 5

Calcolare il raggio della traiettoria di una molecola di He^4 (massa = $4 \times m_{protone}$), ionizzata una volta e dotata di un'energia cinetica di 10^{-13} J, in un campo magnetico costante di 5 T, ortogonale alla traiettoria.

$$K = 1/2mv^2 \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{2K/m}; \quad \rightarrow \quad qvB = mv^2/r \quad \rightarrow$$
$$r = mv/(qB) = \sqrt{2Km}/(qB) = \sqrt{2 \times 10^{-5} \times 4 \times 1.67 \times 10^{-27}}/(1.602 \times 10^{-19} \times 5) = 4.56 \text{ cm.}$$

Esercizio 6

- Due fili conduttori rigidi rettilinei, infiniti e paralleli, sono percorsi da correnti di uguale intensità i = 150 A. I conduttori sono separati da molle isolanti, di costante elastica k = 7.5 N/m, poste perpendicolarmente ai fili e ad una distanza L = 2.8 m tra di loro (v. figura).
a) Quale deve essere il verso relativo delle due correnti perché le molle siano contratte rispetto alla loro lunghezza di riposo? Spiegare perché.
b) Calcolare la contrazione delle molle, sapendo che quando circolano le correnti la distanza dei conduttori è d = 4.6 cm.



– All'equilibrio la forza magnetica fra i fili è bilanciata dalla forza elastica.

(a) Le molle si contraggono, quindi la forza magnetica fra i fili è attrattiva. Ne consegue che le correnti sono in verso concorde.

(b) Per una sezione dei due fili di lunghezza L, comprendente una molla, si ha $\frac{\mu_0 L i^2}{2\pi d} = k\Delta$, dove Δ è la contrazione della molla.

$\Delta = \frac{\mu_0 L i^2}{2\pi d k} = \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot 2.8 \cdot (150)^2}{0.046 \cdot 7.5} = 3.7$ cm.

Esercizio 7

Una sfera conduttrice di raggio R_1 = 1 m ha una carica elettrica q = 3 * 10^{-9} C. La sfera viene connessa a una sfera conduttrice più piccola e scarica avente raggio R_2 = 0.5 m per mezzo di un filo conduttore di capacità trascurabile. La distanza tra le due sfere è grande, tale da poter trascurare effetti di induzione elettrostatica.
Determinare la carica di ciascuna sfera dopo il collegamento.
Calcolare l'energia elettrostatica del sistema prima e dopo il collegamento.