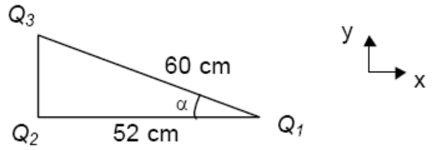
Esercizio 1

Calcolare la forza che agisce sulla carica Q_1 = 100 μC, dovuta alle cariche Q_2 = -30 μC e Q_3 = 70 μC disposte come riportato in figura



Soluzione: La forza che agisce sulla carica Q_1 è data dalla composizione vettoriale delle forze dovute alle due cariche Q_3 e Q_3

$$\left|F_{12}\right| = \left|k\frac{Q_1Q_2}{r_{12}^{\ 2}}\right| = 99.9\,N$$

$$\left|F_{13}\right| = \left|k\frac{Q_1Q_3}{r_{13}^{\ 2}}\right| = 175\,N$$

$$\left|F_{13x}\right| = \left|F_{13}\right|\cos\alpha - \left|F_{12}\right| = 51.7\,N$$

$$\left|F_{13y}\right| = -\left|F_{13}\right|\text{sen}\,\alpha = -87.5\,N$$

$$F_{13} = F_{13}\mathrm{i} + F_{13}\mathrm{j} = (51.7\mathrm{i} - 87.5\mathrm{j})\,N$$

Esercizio 2

3) Quattro cariche puntiformi si trovano ai vertici di un quadrato, di lato 30 cm. Il loro valore è, in senso orario, rispettivamente di 2 nC, 6 nC, -2 nC, 6 nC. Determinare il valore del campo elettrico (modulo, direzione e verso) e del potenziale elettrico al centro del quadrato. .

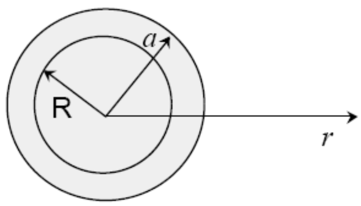
3. E = 799 N/C (in direzione della carica da –2mC);

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{d_1} + \frac{q_2}{d_2} + \frac{q_3}{d_3} + \frac{q_4}{d_4}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{l/\sqrt{2}}\left[q_1 + q_2 + q_3 + q_4\right] = 509\ V$$

(rispetto all'infinito).

Esercizio 3

Una sfera di raggio *a* possiede una densità di carica $\rho = k / r^2$, dove *r* indica la distanza dal centro della sfera e k è una costante. Calcolare il campo elettrico ed il potenziale all'interno della sfera considerando che all'esterno della sfera sia $\rho = 0$.



Soluzione: La simmetria sferica implica che il campo è radiale, quindi si può applicare il teorema di Gauss ad una sfera di raggio *R* concentrica a quella data. La carica contenuta all'interno di tale sfera è

$$q = \int_0^R \rho 4\pi r^2 dr = 4\pi k R$$

Il campo su tale sfera vale

$$E(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{k}{\varepsilon_0 R}$$

Calcoliamo ora il potenziale della sfera di raggio *R*, supponendo di porre $V_\infty = V(r = \infty) = 0$,

$$V_R = \int_R^\infty E dr = \int_R^a E dr + \int_a^\infty E dr$$

il secondo integrale indica il potenziale sulla superficie della sfera di raggio *a* che contiene la carica totale $q = 4\pi k a$ e quindi vale

$$V_a = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{k}{\varepsilon_0}$$

si ottiene, infine,

$$V_R = \int_R^a E dr + V_a = \int_R^a \frac{k}{\varepsilon_0 r} dr + V_a = \frac{k}{\varepsilon_0}\left(\log\frac{a}{R} + 1\right)$$

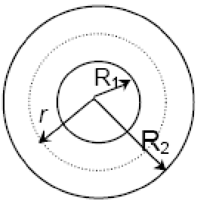
Esercizio 4

3) Una sferetta piena, fatta di legno, di raggio 3 cm possiede una carica di 10 nC. Si calcoli il campo elettrico in tre punti :
a) al centro della sferetta;
b) alla distanza di 2 cm dal centro;
c) alla distanza di 10 cm dal centro.

3. a $r = 0$ $\quad E = 0$;
a $r = 2$ cm $\quad E = 1/(4\pi\varepsilon_0)\ qr/R^3 = 6.66 \cdot 10^4$ N/C;
a $r = 10$ cm $\quad E = 1/(4\pi\varepsilon_0)\ q/r^2 = 8.99 \cdot 10^3$ N/C.

Esercizio 5

Calcolare la capacità di un condensatore formato da due superfici sferiche concentriche di raggio R_1 ed R_2 e caricate con una carica Q.



Soluzione: Si applica il teorema di Gauss ad una sfera concentrica con quelle del condensatore ed avente raggio $R_1 < r < R_2$. Le linee di forza hanno un andamento radiale e quindi

$$\Phi_E = E(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}; \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

La differenza di potenziale tra le due sfere è

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E \cdot dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}$$

ricordando che $C = Q/\Delta V$ si ricava

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$$

Si noti che

a) se $R_2 >> R_1$ allora $C=4\pi\varepsilon_0 R_1$
b) se $R_2 \approx R_1 \approx R$, con $d = R_2 - R_1$,

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R^2}{d} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

che è il valore di un condensatore piano.
