Esercitazione di AM-03 N 7

Esercitatore: Maristella Petralla

Integrali multipli. Teorema di Fubini. Cambiamento di variabili.

1. Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$
$$\int \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} \mathrm{d}\, x \mathrm{d}\, y$$
sui domini $D' = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2+y^2 \leq 1 \,\}$ e $D'' = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2+y^2 \geq 1 \,\}$. *Suggerimento:* Detto $D'_\varepsilon := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2+y^2 \geq \varepsilon^2 \,\} \cap D'$ con $\varepsilon > 0$ piccolo, abbiamo che $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{D'_\varepsilon} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} \mathrm{d}\, x \mathrm{d}\, y = \int_D \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} \mathrm{d}\, x \mathrm{d}\, y$ (rispettivamente $D''_\varepsilon := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2+y^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \,\} \cap D''$).

2. Calcolare
$$\int_E (2\,y+1) \log(1+x^2) \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y$$
dove E é la parte di piano occupata dalla parabola di equazione $y = 1 - x^2$ e l'asse delle x.

3. Calcolare
$$\int_E \frac{\mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y \, \mathrm{d}\, z}{1+x+y+z}$$
dove $E := \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x,y,z \geq 0 \, x+y+z \leq 1\}$. Calcolare lo stesso integrale sul tetraedro di vertici $(0,0,0), (0,0,2), (0,1,0), (1,0,0)$.

4. Calcolare
$$\int_E x^2 \mathrm{d}\, x \, \mathrm{d}\, y$$
dove E é il settore di cerchio di raggio 1 delimitato dalle semirette $y = \pm\sqrt{3}\, x, x \geq 0$.

5. Date le coordinate polari
$$\begin{cases} x = \rho(\theta) \cos\theta \\ y = \rho(\theta) \sin\theta \end{cases} \tag{1}$$
calcolare la misura $m(E) = \int_E \rho \mathrm{d}\, \rho \, \mathrm{d}\, \theta$ dove E é la spirale $\rho = \theta$, oppure la spirale logaritmica $\rho = e^\theta$ oppure $E := \{\, (\rho,\theta) : \, \frac{-\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \; 0 \leq \rho \leq a \frac{\sqrt{\cos 2\,\theta}}{\cos\theta} \,\}$.