Esercitazione di AM-03 N 6

Esercitatore: Maristella Petralla

Integrali multipli e Teorema di Fubini

1. Calcolare
$$\int_D y^3\, e^x \mathrm{d}\, x \mathrm{d}\, y$$
dove D é l'insieme del semipiano $y > 0$ delimitato dalle circonferenze di centro l'origine e raggio 1 e 2 e dalle rette $x = 0$ e $x = 1$.
Suggerimento: Il dominio si puó esprimere come segue $D = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 1,\ \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\, \}$

2. Calcolare
$$\int_E (x + \sin\, z) \mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y \,\mathrm{d}\, z$$
dove $E := \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq x - y\, \}$.
Suggerimento: Per il Teorema di Fubini detto $T := \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq x\, \}$ $\int_E (x + \sin\, z) \mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y \,\mathrm{d}\, z = \int_T (\int_0^{x-y} (x + \sin z) \mathrm{d}\, z) \mathrm{d}\, x \mathrm{d}\, y$.

3. Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$
$$\int_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} \mathrm{d}\, x \mathrm{d}\, y$$
dove $D = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0, y \geq 0\, \}$.
Suggerimento: Detto $D_\varepsilon := \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^2},\ x^2 + y^2 \geq \varepsilon^2\, \}$ con $\varepsilon > 0$ piccolo, abbiamo che $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{D_\varepsilon} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} \mathrm{d}\, x \mathrm{d}\, y = \int_D \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} \mathrm{d}\, x \mathrm{d}\, y$.