

# AM3 tutorato 2

A.A 2008-2009

Docente: Prof. P. Esposito

Tutori: G.Mancini, E. Padulano

Tutorato 2 del 4 Marzo 2009

**Esercizio 1** Sia  $F = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) \mid 0 \leq f(x) \leq 1\}$  e sia  $\Phi : F \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R})$  la mappa definita da  $\Phi(f)(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x tf(t)dt$ :

- (a) Provare che  $F$  è un sottoinsieme chiuso di  $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$
- (b) Mostrare che  $\Phi(F) \subseteq F$  e che  $\Phi$  è una contrazione in  $F$ .

**Esercizio 2** Sia  $E = \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\}$  lo spazio vettoriale delle successioni reali e sia  $x \in E$ ; Provare che  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \forall p \geq 1$  e che  $\|x\|_p \leq \|x\|_q$  se  $p \geq q$ .

**Esercizio 3** Sia  $x_n(k) = \frac{1}{n^{k+\frac{1}{2}} \sqrt{(k+1)!}}$ ;

Calcolare  $\|x_n\|_2$  e discutere la convergenza di  $x_n$  in  $l_1$  e in  $l_2$ .

**Esercizio 4** Sia  $x_n(k) = \frac{1}{k} \sqrt{2 - \cos \frac{\pi}{\sqrt{kn}}}$ .

- (a) Mostrare che  $x_n \in l_p \forall p > 1$ .
- (b) Provare che  $x_n$  converge in  $l_p \forall p > 1$  ad una opportuna successione  $x$  e che  $\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0$ .

**Esercizio 5** Calcolare il limite della successione definita per ricorrenza  $\begin{cases} x_0 = \frac{1}{3} \\ x_n = \frac{1}{x_{n-1}+2} \end{cases}$

**Esercizio 6** Provare che l'equazione  $e^{-\frac{x^3}{7} \cos^2 x} = x$  ha una unica soluzione nell'intervallo  $[0, 1]$ .

**Esercizio 7** Calcolare i seguenti integrali:

- (a)  $\int_1^e x^2 \log^2 x \, dx$
- (b)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \, dx$
- (c)  $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} \, dx$
- (d)  $\int_0^\pi \frac{1}{1 + \sin x} \, dx$
- (e)  $\int_{-2}^0 \frac{3x+2}{(x-1)(x^2+2x+2)} \, dx$