I Esonero di AM3 - 17/4/2009 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1

a) Da $\sin x = x + O(x^3)$ per $x \to 0$ si ottiene che $\delta x \le \sin x \le \frac{x}{\delta}$ e $|\sin x - x| \le \frac{x^3}{\delta}$ per $x \in [0,1]$ e $\delta > 0$ piccolo. Da $|\sin| \le 1$, si ottiene allora

$$\|x_n\|_1 \ge \frac{\delta}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1} = +\infty\,, \quad \|x_n\|_2^2 \le \frac{9}{n^2\delta^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2} < +\infty.$$

Ossia, $x_n \notin l^1$ ma $x_n \in l^2$.

b) Data $C_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, dal punto precedente si ha che

$$\|x_n\|_2 \le \frac{3C_0}{n\delta} \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty,$$

ossia $x_n \to 0$ in l^2. D'altra parte

$$x_n^{(k)} - y_n^{(k)} = \frac{2}{\sqrt{k+1}}\left(\sin(\frac{1}{n\sqrt{k+1}}) - \frac{1}{n\sqrt{k+1}}\right) + \frac{1}{(k+1)^{\frac{3}{2}}}\sin(\frac{1}{n\sqrt{k+1}})\sin(kn)$$

e quindi

$$\|x_n - y_n\|_1 \le \frac{1}{\delta}(\frac{1}{n} + \frac{2}{n^3})\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2} \to 0$$

per $n \to +\infty$. Ossia $x_n - y_n \to 0$ in l^1.

Esercizio 2

Abbiamo $F(0,0) = (0,0)$ e

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{e^y}{1+x} & e^y\ln(1+x) \\ 2(x+1)\frac{y}{y^2+1} & (x+1)^2\frac{1-y^2}{y^2+1} \end{pmatrix}.$$

In particolare $DF(0,0) = \mathrm{Id}$ è una matrice 2×2 invertibile, e quindi la mappa F è localmente invertibile in $(0,0)$. Dobbiamo trovare $\rho > 0$ piccolo tale che

$$\sup_{(x,y)\in B_\rho(0,0)}\|DF(x,y) - \mathrm{Id}\|_\infty \le \frac{1}{4}.$$

Dalle stime

$$|\frac{e^y}{x+1} - 1| \le \frac{|e^y - 1| + |x|}{|x+1|} \le 2(e\rho + \rho) \le 8\rho,$$
$$|e^y\ln(1+x)| \le 2e|x| \le 6\rho,$$
$$|2(x+1)\frac{y}{y^2+1}| \le 4|y| \le 4\rho$$

e

$$\begin{aligned} |(x+1)^2\frac{1-y^2}{y^2+1} - 1| &\le |(x+1)^2\frac{1}{y^2+1} - 1| + 4y^2 \le |\frac{1}{y^2+1} - 1| + 2|x| + x^2 + 4y^2 \\ &\le 2|x| + x^2 + 5y^2 \le 8\rho, \end{aligned}$$

segue che ρ deve essere scelto in modo tale che $\rho \leq \frac{1}{32}$ e $r = \frac{\rho}{2}$. Ossia la mappa inversa G è definita da $B_{\frac{1}{64}}(0,0)$ a valori in $B_{\frac{1}{32}}(0,0)$. Poiché $DG(0,0) = DF(0,0)^{-1} = \mathrm{Id}$, lo sviluppo di Taylor di G in $(0,0)$ viene:

$$G(z,w) = (z,w) + O(z^2 + w^2)$$

per $(z,w) \to (0,0)$.

Esercizio 3

a) Sia S_0 la sfera di raggio $\sqrt{5}r$ e centro l'origine. I punti critici vincolati di f su S_0 devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} x^{-1} = \lambda x \\ y^{-1} = \lambda y \\ 3z^{-1} = \lambda z. \end{cases}$$

Quindi $\lambda \neq 0$ e

$$x^2 = y^2 = \frac{z^2}{3} = \frac{1}{\lambda}.$$

L'unico punto critico vincolato di f su S_0 che si trova in S è quindi $P = (r, r, \sqrt{3}r)$, con $f(P) = 5\ln r + \frac{3}{2}\ln 3$. Osservando che

$$\lim_{(x,y,z)\in S,\, x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}\to+\infty} f(x,y,z) = -\infty,$$

abbiamo che $\inf_S f = -\infty$ mentre $\sup_S f$ è raggiunto in S. Ossia $\max_S f = f(P) = 5\ln r + \frac{3}{2}\ln 3$.

b) Dati $a, b, c > 0$, poniamo $r = \sqrt{\frac{a+b+c}{5}}$, $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$ e $z = \sqrt{c}$ cosicché $a+b+c = x^2+y^2+z^2 = 5r^2$. Usando il punto (a) abbiamo che

$$abc^3 = e^{2f(x,y,z)} \leq e^{2f(P)} = 27r^{10} = 27(\frac{a+b+c}{5})^5.$$