I Esonero di AM3 - 17/4/2009 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1
Abbiamo $F(0,0)=(0,0)$ e

$$DF(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\ln(2+xy)}{\ln 2}+\frac{xy}{\ln 2(2+xy)} & \frac{x^2}{\ln 2(2+xy)} \\ 2x\frac{\cos(x^2+y)}{y^2+1} & \frac{\cos(x^2+y)}{y^2+1}-\frac{2y\sin(x^2+y)}{(y^2+1)^2} \end{pmatrix}.$$

In particolare $DF(0,0)=\mathrm{Id}$ è una matrice 2×2 invertibile, e quindi la mappa F è localmente invertibile in $(0,0)$. Dobbiamo trovare $\rho>0$ piccolo tale che

$$\sup_{(x,y)\in B_\rho(0,0)}\|DF(x,y)-\mathrm{Id}\|_\infty\le\frac{1}{4}.$$

Sia $\rho<1$. Dalle stime

$$|\frac{\ln(2+xy)}{\ln 2}+\frac{xy}{\ln 2(2+xy)}-1|=|\frac{\ln(1+\frac{xy}{2})}{\ln 2}+\frac{xy}{\ln 2(2+xy)}|\le\frac{2}{\ln 2}\rho^2\le 4\rho,$$

$$|\frac{x^2}{\ln 2(2+xy)}|\le\frac{\rho^2}{\ln 2}\le 2\rho,$$

$$|2x\frac{\cos(x^2+y)}{y^2+1}|\le 2\rho$$

$$|\frac{\cos(x^2+y)}{y^2+1}-\frac{2y\sin(x^2+y)}{(y^2+1)^2}-1|\le|\cos(x^2+y)-y^2-1|+2\rho\le|x^2+y|+3\rho\le 5\rho,$$

segue che ρ puó essere scelto come $\rho=\frac{1}{20}$ e $r=\frac{1}{40}$. Ossia la mappa inversa G è definita da $B_{\frac{1}{40}}(0,0)$ a valori in $B_{\frac{1}{20}}(0,0)$.

Esercizio 2
Siano x,y,z le tre dimensioni del parallelepipedo. Poiché i vertici sono della forma $(\pm\frac{x}{2},\pm\frac{y}{2},\pm\frac{z}{2})$, affinché il parallelepipedo sia inscritto nell'ellissoide si deve avere $\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}+\frac{z^2}{4c^2}=1$. Dobbiamo quindi massimizzare la funzione volume $f(x,y,z)=xyz$ sul vincolo

$$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=4,\ x,y,z\ge 0\}.$$

Dal metodo dei moltiplicatori di Lagrange, il punto di massimo assoluto di f su E deve essere cercato tra le soluzioni in E di

$$a^2yz=\lambda x\ ,\ \ b^2xz=\lambda y\ ,\ \ c^2xy=\lambda z.$$

Siccome in punti per cui una delle tre componenti si annulla si ottiene sempre $f=0$ che non contribuisce al massimo assoluto, possiamo supporre $x,y,z>0$. Moltiplichiamo la prima/seconda/terza equazione per $x/y/z$ e poi le sommiamo cosí da ottenere

$$3xyz=\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})=4\lambda,$$

ossia $\lambda=\frac{3}{4}xyz$. Sostituendo il valore di λ nelle equazioni otteniamo infine come unico punto critico vincolato il punto

$$P=\frac{2\sqrt{3}}{3}(a,b,c).$$

Quindi

$$\max_E f = f(P) = \frac{8\sqrt{3}}{9}abc.$$

Esercizio 3

Poiché $x^2 - 1 \leq \sqrt{1-x^2}$ per ogni $|x| \leq 1$, possiamo scrivere l'insieme E in forma normale come

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [-1,1], \; x^2 - 1 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}.$$

Dal Teorema di Fubini, abbiamo che

$$\int_E y \arccos x \, dx \, dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2 - x^4)\arccos x \, dx = \frac{1}{2}(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5})\arccos x \,|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{15}$$

grazie ad un'integrazione per parti ed

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}) = 0$$

per disparitá della funzione integranda.

Esercizio 4

Grazie al cambio di variabile $(\rho,\theta) \to (a\rho\cos\theta, b\rho\sin\theta)$ (il cui jacobiano vale $ab\rho$), abbiamo che

$$\int_A (x^2 - y^2)\, dxdy = ab\int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi}(a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta)d\theta = \frac{ab\pi}{4}(a^2 - b^2).$$

Parametrizzando $\partial^+ A$ come $\gamma : \theta \in [0,2\pi] \to (a\cos\theta, b\sin\theta)$, abbiamo che

$$\int_{\partial^+ A}\omega = \frac{ab}{3}\int_0^{2\pi}(a^2\cos^4\theta - b^2\sin^4\theta)d\theta = \frac{ab}{3}(a^2 - b^2)\int_0^{2\pi}\cos^4\theta = \frac{ab\pi}{4}(a^2 - b^2).$$

Abbiamo quindi verificato la validitá del Teorema di Gauss-Green per la $1-$forma ω sul dominio A.