

AM3 tutorato 1

A.A 2008-2009

Docente: Prof. P. Esposito
Tutori: G. Mancini, E. Padulano
Tutorato 1 del 25 Febbraio 2009

Esercizio 1 Calcolare i seguenti integrali:

$$1. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \cos x \, dx \qquad 3. \int_1^{\infty} \frac{3}{x^2(x^2 + 3)} \, dx$$

$$2. \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} \, dx \qquad 4. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(e^{2x} + 1)^2} \, dx$$

Esercizio 2 Dimostrare le seguenti disuguaglianze:

- (a) $|\sin x| \leq |x|$
- (b) $|1 - \cos x| \leq \frac{1}{2}x^2$
- (c) $|e^x - 1| \leq 3|x| \, \forall x \text{ t.c. } |x| \leq 1$
- (d) $|\log(1 + x)| \leq 2|x|$ se $|x| < \frac{1}{2}$
- (e) $|\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6}$

Esercizio 3 Disegnare i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 :

- (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; |y| \leq 1 - |x|, -1 \leq x \leq 1\}$;
- (b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + 4y^2 \leq 4, x^2 - 2y^2 \leq 1\}$;
- (c) $C = \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 ; 1 \leq \rho \leq 2, \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi\}$;
- (d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; |y| \leq \frac{2|x|}{(x^4 + 1)}\}$;

Esercizio 4 Disegnare i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^3 :

- (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$;
- (b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2 + y\}$;
- (c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + z = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$;
- (d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 \leq z^2(1 - z)^2\}$;

Esercizio 5 Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio normato dimostrare che la funzione $x \mapsto \|x\|$ è continua su E .

Esercizio 6 Sia $E = \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\}$ lo spazio vettoriale delle successioni reali;

- (a) Mostrare che $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|$ è una norma su E .
- (b) Provare che $\forall c > 0$ l'insieme $E_c = \{x \in E ; \|x\|_1 \leq c\}$ è un sottoinsieme chiuso di E .
- (c) Dimostrare che la mappa $\Phi : E_1 \rightarrow E_1$ definita da $\Phi(x)(n) = \frac{x(n)^2}{n+2}$ è una contrazione in E_1 .

Esercizio 7 Calcolare (senza fare troppi conti) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2} \arctan x}{(1 + \cos^2 x) \cosh x} \log(1 + |x|) dx$