Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Analisi 2

A.A. 2008-2009 - Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Dott. Gabriele Mancini e Luca Battaglia

SOLUZIONI DEL TUTORATO NUMERO 9 (28 NOVEMBRE 2008)
MASSIMI E MINIMI IN PIÙ VARIABILI, FORMULA DI TAYLOR

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^2y^2$: le derivate parziali sono $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2xy^2$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2y - 2x^2y$, dunque i punti in cui $\nabla f(x,y) = (0,0)$ sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} 2x\left(1-y^2\right) = 0 \\ 2y\left(1-x^2\right) = 0 \end{cases}$: dalla prima equazione si deduce che $x = 0 \vee y = \pm 1$: se $x = 0$, dalla seconda ricaviamo $y = 0$, mentre se $y = \pm 1$ si ricava $x = \pm 1$, quindi i punti critici di f sono i seguenti: $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$; per determinare la loro natura, studiamo la matrice Hessiana: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = = 2\left(1-y^2\right)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4xy$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\left(1-x^2\right)$, dunque $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, che è chiaramente definita positiva e dunque il punto $(0,0)$ è un minimo locale, mentre $H_f(1,1) = H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante negativo e dunque i punti $(1,1)$ e $(-1,-1)$ sono due selle; infine $H_f(-1,1) = H_f(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ ha anch'essa determinante negativo e quindi anche questi due sono punti di sella.

   (b) $f(x,y) = x^2y + xy^2 - xy - x^2y^2$: $\nabla f(x,y) = \big(2xy + y^2 - y - 2xy^2, x^2 + 2xy - x - 2x^2y\big) = (y(y-1)(1-2x), x(x-1)(1-2y))$ e dunque i punti critici sono $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$. La matrice Hessiana è $\begin{pmatrix} -2y(y-1) & (1-2x)(2y-1) \\ (1-2x)(2y-1) & -2x(x-1) \end{pmatrix}$, quindi $H_f(0,0) = = H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $H_f(0,1) = H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H_f\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; dunque, il punto $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ è di minimo locale, mentre gli altri non sono né massimi né minimi.

   (c) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2y^3}{3} - 4x^2 - y^2 + 2xy^2 + 2xy - x^2y$. $\nabla f(x,y) = = \big(x^2 - 8x + 2y^2 + 2y - 2xy, -2y^2 - 2y + 4xy + 2x - x^2\big)$, quindi i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} x^2 - 8x + 2y^2 + 2y - 2xy = 0 \\ -2y^2 - 2y + 4xy + 2x - x^2 = 0 \end{cases}$. Sommando le due equazioni si ottiene che $2xy - 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 3$; se $x = 0$ sostituendo nella prima equazione si ottiene $2y^2 + 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = -1$; se $y = 3$ si ottiene invece che $x^2 - 14x + 24 = 0 \Rightarrow x = 12 \vee x = 2$; i punti stazionari di f sono dunque $(0, 0)$, $(0, -1)$, $(12, 3)$ e $(2, 3)$; Studiamo ora la matrice hessiana di f: $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 8 - 2y & 4y + 2 - 2x \\ 4y + 2 - 2x & -4y - 2 + 4x \end{pmatrix}$, dunque nei punti critici otteniamo $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $H_f(0, -1) = $ $= \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $H_f(12, 3) = \begin{pmatrix} 10 & -10 \\ -10 & 34 \end{pmatrix}$ e $H_f(2, 3) = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -6 \end{pmatrix}$, quindi $(0, 0)$ è un punto di massimo, $(12, 3)$ è un punto di minimo e $(0, 1)$ e $(2, 3)$ sono punti di sella.

(d) $f(x, y) = (x + y)\,(y + 1)^2$: $\nabla f(x, y) = \left((y + 1)^2, (y + 1)(2x + 3y + \right.$ $\left. +1)\right) = (0, 0) \Leftrightarrow y = -1$; $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 2(y + 1) \\ 2(y + 1) & 2x + 3y + 1 + 3(y + 1) \end{pmatrix}$ e dunque $H_f(x, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x - 2 \end{pmatrix}$ è semidefinita e quindi non sappiamo ancora di che tipo sono questi punti critici; per saperlo, studiamo il segno della funzione: $f(x, y) > 0 \Leftrightarrow x > -y$, quindi i punti $(x, -1)$ con $x > 1$ si trovano all'interno della regione in cui f è positiva ma $f(x, -1) = 0$ quindi sono dei minimi locali; analogamente, se $x < 1$, per ognuno di questi punti c'è un intorno in cui la funzione è negativa e quindi sono dei minimi; infine, $(1, -1)$ è una sella perché intorno ad esso ci sono sia punti in cui f è negativa sia punti in cui è positiva.

(e) $f(x, y) = x^4 + y^2 e^{y + 2x^2}$: $\nabla f(x, y) = \left(4x^3 + 4xy^2 e^{y+2x^2}, y(2 + y)e^{y+2x^2}\right)$, quindi i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} 4x^3 + 4xy^2 e^{y+2x^2} = 0 \\ y(2 + y)e^{y+2x^2} = 0 \end{cases}$; dalla prima equazione si ricava che $x = 0$ e dalla seconda che $y = 0 \vee y = -2$. Studiamo ora la matrice hessiana di f: $H_f(x, y) =$
$= \begin{pmatrix} 12x^2 + 4y^2(1 + 4x^2)e^{y+2x^2} & 4x(2y + y^2)e^{y+2x^2} \\ 4x(2y + y^2)e^{y+2x^2} & (2 + 2y)e^{y+2x^2} + (2y + y^2)e^{y+2x^2} \end{pmatrix}$, quindi $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $H_f(0, -2) = \begin{pmatrix} 16e^{-2} & 0 \\ 0 & -2e^{-2} \end{pmatrix}$, quindi $(0, -2)$ è un punto di sella ma non abbiamo sul punto $(0, 0)$; notiamo per che si ha $f(x, y) = x^4 + y^2 e^{y+2x^2} \geq 0 = f(0, 0)\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e quindi $(0, 0)$ è un punto di minimo.

(f) $f(x, y) = x^3 - x^2 \cos y$: $\nabla f(x, y) = \left(3x^2 - 2x \cos y, x^2 \sin y\right)$, che si annulla nei punti del tipo $(0, y)$, $\left(\dfrac{2}{3}, 2k\pi\right)$ e $\left(-\dfrac{2}{3}, (2k + 1)\pi\right)$; $H_f(x, y) =$ $\begin{pmatrix} 6x - 2\cos y & 2x \sin y \\ 2x \sin y & x^2 \cos y \end{pmatrix}$, dunque $H_f\left(\dfrac{2}{3}, 2k\pi\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$ e perciò i punti del tipo $\left(\dfrac{2}{3}, 2k\pi\right)$ sono dei minimi, mentre

$H_f\left(-\frac{2}{3},(2k+1)\pi\right)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -\frac{4}{9}\end{pmatrix}$ e quindi i punti di questo tipo sono dei massimi locali. Tuttavia, sui punti dell'asse y la matrice Hessiana $H_f(0,y)=\begin{pmatrix}-2\cos y & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ è semidefinita e quindi non ci da informazioni; cerchiamo di capire la natura di questi punti critici studiando il segno della nostra funzione: $f(x,y)>0 \Leftrightarrow x>\cos y$; dunque, i punti del tipo $(0,y)$ con $\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi<y<\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi$ sono dei massimi locali, perché $f(0,y)=0$ ma in ognuno di questi punti c'è un intorno in cui la funzione assume valori negativi; analogamente, i punti con $\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi<y<\left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi$ sono minimi locali perché intorno ad ognuno di questi punti la funzione ha valori positivi, ed infine i punti del tipo $\left(0,\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)$ sono punti di sella perché intorno a ciascuno di questi punti la funzione assume sia valori positivi che negativi.

(g) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-x^2y^2+x^4$: $\nabla f(x,y,z)=\big(2x-2xy^2+4x^3, 2y-2x^2y,2z\big)$, pertanto i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema $\begin{cases}2x-2xy^2+4x^3=0\\ 2y-2x^2y=0\\ 2z=0\end{cases}$: dalla terza equazione ricaviamo che $z=0$; dalla seconda otteniamo $y=0\vee x=\pm1$; se $y=0$ dalla prima equazione si ricava $2x+4x^3=0\Rightarrow x=0$; se $x=\pm1$ abbiamo $6-2y^2=0\Rightarrow y=\pm\sqrt{3}$, dunque i punti stazionari sono $(0,0,0)$, $\big(\pm1,\sqrt{3},0\big)$, $\big(\pm1,-\sqrt{3},0\big)$. Studiamo ora la matrice hessiana di f: $H_f(x,y,z)=\begin{pmatrix}2-2y^2+12x & -4xy & 0\\ -4xy & 2-2x^2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, quindi $H_f(0,0,0)=$ $=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ è una matrice definita positiva e dunque $(0,0,0)$ è un punto di minimo locale per f; $H_f\left(1,\pm\sqrt{3},0\right)=$ $=\begin{pmatrix}8 & \mp4\sqrt{3} & 0\\ \mp4\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ e $H_f(-1,\pm\sqrt{3},0)=\begin{pmatrix}-16 & \pm4\sqrt{3} & 0\\ \pm4\sqrt{3} & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ hanno autovalori 2, 12 e -4 e quindi $\big(\pm1,\pm\sqrt{3},0\big)$ sono punti di sella.

(h) $f(x,y,z)=\cos(xyz)$: $\nabla f(x,y,z)=(-yz\sin(xyz),-xz\sin(xyz), xz\sin(xyz))=(0,0,0)\Leftrightarrow xyz=k\pi$; per classificare questi punti stazionari non sono necessari ulteriori calcoli: è sufficiente notare che la funzione assume valori tra -1 e 1 e dunque i punti critici appartenenti alla regione $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, xyz=2k\pi\}$, essendo tali che $f(x,y,z)=1$, saranno necessariamente dei punti di massimo, mentre i punti tali che $xyz=(2k+1)\pi$ sono dei minimi, perché la funzione in quei punti vale -1.

2. (a) $f(x,y)=x^4-x^2+y^2$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$: notiamo che $f(0,y)=+\infty$

e quindi $\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = +\infty$; inoltre, f è inferiormente limitata perché $x^4 - x^2 + y^2 = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$; cerchiamo gli eventuali punti di minimo tra i punti stazionari della nostra funzione: $\nabla f(x,y) = \left(4x^3 - 2x, 2y\right)$, quindi i tre punti critici sono $(0,0)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$: essendo $f(0,0) = 0$ e $f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$ possiamo concludere che $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) =$ $= f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + y^4 + 3}$ è una funzione strettamente positiva, perché non si annulla in alcun punto e $f(0,0) = \frac{1}{3} > 0$; inoltre $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = 0$, quindi $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = 0$ e dunque (per quanto dimostrato nell'ultimo esercizio del settimo tutorato) la funzione ammetterà sicuramente almeno un punto di massimo, che sarà tra i suoi punti critici, ma essendo $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{2x+2}{\left(x^2 + 2x + y^4 + 3\right)^2}, \dfrac{4y^3}{\left(x^2 + 2x + y^4 + 3\right)^2}\right)$ nullo solamente nel punto $(-1,0)$, questo sarà proprio l'unico punto di massimo assoluto di f, quindi $\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) =$ $= \max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = f(-1,0) = \frac{1}{2}$.

3. (a) $f(x,y) = \cos x \sin y$: Ricordiamo la formula dello sviluppo di Taylor al secondo ordine nel punto $(0,0)$: $f(x,y) = f(0,0) + \langle \nabla f(0,0), (x,y)\rangle +$ $+\frac{1}{2}\langle H_f(0,0)(x,y), (x,y)\rangle + o\left(x^2 + y^2\right)$; calcoliamo dunque le derivate prime e seconde della nostra funzione: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin x \sin y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$ $= \cos x \cos y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\cos x \sin y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\sin x \cos y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\cos x \sin y$: calcolando queste derivate nell'origine, si ha $\nabla f(0,0) = (0,1)$ e $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, quindi $\cos(x)\sin(y) = 0+$ $+\langle (0,1), (x,y)\rangle + \frac{1}{2}\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(x,y), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\rangle + o\left(x^2 + y^2\right) = y+$ $+o\left(x^2 + y^2\right)$.

(b) $f(x,y) = \log\left(1 + x + y^2\right)$: $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{1}{1 + x + y^2}, \dfrac{2y}{1 + x + y^2}\right)$,

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{(1+x+y^2)^2} & -\frac{2y}{(1+x+y^2)^2} \\ -\frac{2y}{(1+x+y^2)^2} & \frac{2\left(1+x+y^2\right)-4y^2}{(1+x+y^2)^2}\end{pmatrix}$$, quindi $\log\left(1+x+y^2\right)=$
$=\langle(1,0),(x,y)\rangle+\frac{1}{2}\langle(x,y)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}\rangle+o\left(x^2+y^2\right)=x-\frac{x^2}{2}+$
$+y^2+o\left(x^2+y^2\right)$.

4. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$: essendo la funzione nulla lungo gli assi cartesiani, si avrà $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, mentre nei punti diversi dall'origine si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y^3\left(x^4+y^2\right)-4x^4y^3}{\left(x^4+y^2\right)^2}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=$
$=\frac{3xy^2\left(x^4+y^2\right)-2xy^4}{\left(x^4+y^2\right)^2}$, che sono entrambe continue nell'origine, perché
$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|=\left|\frac{y^3\left(x^4+y^2\right)-4x^4y^3}{\left(x^4+y^2\right)^2}\right|\leq\frac{|y|^3\left(x^4+y^2\right)}{\left(x^4+y^2\right)^2}+\frac{4x^4|y|^3}{\left(x^4+y^2\right)^2}\leq$
$\leq\frac{|y|\left(x^4+y^2\right)\left(x^4+y^2\right)}{\left(x^4+y^2\right)^2}+\frac{4\left(x^4+y^2\right)|y|\left(x^4+y^2\right)}{\left(x^4+y^2\right)^2}=5|y|\overset{(x,y)\to(0,0)}{\to}0$ e
$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|=\left|\frac{3xy^2\left(x^4+y^2\right)-2xy^4}{\left(x^4+y^2\right)^2}\right|\leq\frac{3|x|y^2\left(x^4+y^2\right)}{\left(x^4+y^2\right)^2}+\frac{2|x|y^4}{\left(x^4+y^2\right)^2}\leq$
$\leq\frac{3|x|\left(x^4+y^2\right)\left(x^4+y^2\right)}{\left(x^4+y^2\right)^2}+\frac{2|x|\left(x^4+y^2\right)^2}{\left(x^4+y^2\right)^2}=5|x|\overset{(x,y)\to(0,0)}{\to}0$; dunque, $f\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.
Facciamo vedere ora che f non è di classe C^2 su tutto $\mathbb{R}^2$: se per assurdo lo fosse, per il lemma di Schwartz dovrebbe essere $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, e quindi in particolare anche nell'origine; invece, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=$
$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}=0$ ma $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}=$
$=\lim_{y\to0}\frac{y^5}{y^4y}=1$.

5. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ è chiaramente differenziabile al di fuori dell'origine, quindi ci limiteremo a studiarne il comportamento nell'origine: la funzione è continua perché $\left|\frac{x^2y^3}{x^4+y^4}\right|=\frac{|y|\sqrt{x^4}\sqrt{y^4}}{x^4+y^4}\leq$
$\leq\frac{|y|\sqrt{x^4+y^4}\sqrt{x^4+y^4}}{x^4+y^4}=|y|\overset{(x,y)\to(0,0)}{\to}0$; inoltre, ammette derivate parziali entrambe nulle perché lungo gli assi è identicamente nulla, e ammette anche derivate direzionali perché $\lim_{t\to0^+}\frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t}=$
$=\lim_{t\to0^+}\frac{t^5h^2k^3}{t^5\left(x^4+y^4\right)}=\frac{h^2k^3}{h^4+k^4}$; tuttavia, la funzione non è differenziabile

perché $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{f(h,k) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}} =$

$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{h^2 k^3}{(h^4+k^4)\sqrt{h^2+k^2}}$ non esiste, in quanto lungo gli assi tale quantità vale 0, ma se $h = k$ vale $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.