ESERCITAZIONE 1: UNIFORME CONTINUITÀ

Tiziana Raparelli

24/02/2009

1

Teorema 1.1 (Teorema della farfalla)**.** *Se* $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *è uniformemente continua (U.C.), allora* $\exists A, B \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq Ax + B, \forall x \in dom(f)$.

Teorema 1.2 (Teorema dell'asintoto)**.** *Sia* $f : ([a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *continua e tale che* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, *allora* f *è U.C.*

Osservazione 1.1. *Il viceversa non è vero, esistono funzioni U.C. che non hanno asintoto orizzontale.*

Proposizione 1.1. *Se* f *e* g *sono funzioni U.C. allora anche* $(f + g)(x)$ *e* $f(g(x))$ *lo sono.*

(Si dimostra semplicemente applicando la definizione.)

Proposizione 1.2. *Se* $a < c < b$ *e* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *è continua in* (a, b) *t.c. entrambe le restrizioni* $f|_{(a,c]}$ *e* $f|_{[c,b)}$ *sono U.C., allora* f *è U.C.*

Dimostrazione. Applicando la definizione di U.C. nei due sottointervalli:
$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_1$ t.c. $\forall x, y \in (a, c], |x - y| < \delta_1, \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$
$\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_2$ t.c. $\forall x, y \in [c, b), |x - y| < \delta_2, \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.
Posto $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, prendiamo x, y t.c. $|x - y| < \delta$. Possiamo supporre, $x < y$. L'unico caso da verificare è quando $x < c < y$. Ma allora:
$|x - c| < |x - y| < \delta \leq \delta_1$ e $x, c \in (a, c]$, dunque$|f(x) - f(c)| < \epsilon$
e analogamente:
$|y - c| < |x - y| < \delta \leq \delta_2$ e $y, c \in [c, , b)$, dunque $|f(y) - f(c)| < \epsilon$, risulta allora

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(c)| + |f(c) - f(y)| < 2\epsilon \quad ,$$

cioè f è U.C. □

ESERCIZIO 1:

Stabilire se le seguenti funzioni sono uniformemente continue negli intervalli indicati:

$$
\begin{aligned}
(a) f(x) &= \frac{e^x - 1}{x} \qquad \text{in } (-\infty, 0), (1, , +\infty) \\
(b) f(x) &= \log(1+x) \qquad \text{in } (0, 1) \\
(c) f(x) &= x \arctan \frac{1}{x} \text{ in } (0, +\infty) \\
(d) f(x) &= (1+x)^{\frac{1}{x}} \text{ in } (0, +\infty) \\
(e) f(x) &= \frac{1}{x^2} \text{ in } (0, 1) \\
(f) f(x) &= \frac{\sin x}{x} \text{ in} (0, +\infty) \\
(g) f(x) &= \sqrt{x} \text{ in } (0, 1) \quad .
\end{aligned}
$$

2

RISPOSTE:
(a) U.C. in $(-\infty, 0)$, NO in $(1, +\infty)$
(b) U.C.
(c) U.C.
(d) U.C.
(e) NO
(f) U.C.
(g) U.C.