Cognome e nome ____________________

SECONDO ESONERO DI AM1C
5 GIUGNO 2009

Esercizio 1.
(a) Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale.
(b) Sia $f(x)$ una funzione limitata e strettamente crescente nell'intervallo $[0,5]$ e tale che

$$\int_0^5 f(x)dx = 10.$$

Dimostrare che esiste almeno un punto $x_0 \in [0,5]$ tale che $f(x_0) < 2$.

Cognome e nome ____________________

SECONDO ESONERO DI AM1C
5 GIUGNO 2009

Esercizio 2.
Calcolare l'area della regione piana compresa tra l'arco di parabola

$$y = 1 - x^2 \quad , \quad -1 \leq x \leq 1$$

e la semicirconferenza

$$x^2 + y^2 = 1 \quad , \quad y \geq 0 \quad .$$

(b) Sia

$$f(x) = \frac{1}{2\sin x + \cos x \sin x} \quad .$$

Determinare l'insieme delle sue primitive.

Cognome e nome ____________________

SECONDO ESONERO DI AM1C
5 GIUGNO 2009

Esercizio 3.
(a) Enunciare e dimostrare il teorema della formula di Taylor con resto di Lagrange.
(b) Approssimare con un polinomio la funzione

$$f(x) = \log(1 + 2x)$$

nell'intervallo $[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}]$ con un errore inferiore a $5 \cdot 10^{-2}$.

Cognome e nome ____________________

SECONDO ESONERO DI AM1C
5 GIUGNO 2009

Esercizio 4.
Dopo avere discusso il carattere del seguente integrale improprio
$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\log x} dx \quad ,$$
calcolare il seguente limite
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^2} \int_2^x \frac{t}{\log t} dt \quad .$$

Cognome e nome ____________________

SECONDO ESONERO DI AM1C
5 GIUGNO 2009

Esercizio 5.
(a) Dire se risulta convergente o meno il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}(-e^{-x}+\sqrt{1+x})}{2x-\arctan(2x)}dx \quad .$$

1 Soluzioni

Esercizio 1
(b) Supponiamo per assurdo sia $f(x) \geq 2 \ \forall x \in [0,5]$, Non può essere $f(x) = 2 \ \forall x \in [0,5]$, perché $f(x)$ non sarebbe strettamente monotona. Allora scelto arbitrariamente $x_1 \in (0,5)$ dovrà essere

$$f(x) > f(x_1) > f(0) \geq 2 \qquad \forall x \in (x_1, 5) \quad ,$$

da cui segue

$$\begin{aligned} &\int_0^5 f(x)dx = \int_0^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^5 f(x)dx \geq \int_0^{x_1} 2dx + \int_{x_1}^5 f(x_1)dx \\ = \ & 2x_1 + (5 - x_1)f(x_1) > 2x_1 + (5 - x_1)2 = 10 \quad . \end{aligned}$$

Esercizio 2

(a) La regione R è quella rappresentata in figura

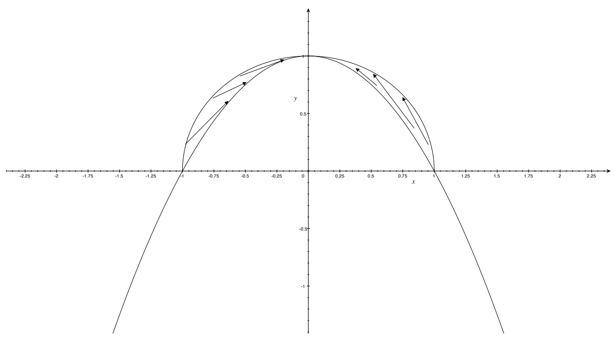

Figura 1: La regione R

Equazione della semicirconferenza:

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad .$$

Semicirconferenza e parabola si intersecano in $x = \pm 1$, $x = 0$, e per $x \in [-1, 1]$ l'arco di parabola rimane al di sotto della semicirconferenza, quindi l'area cercata è data da

$$\int_{-1}^{1} (\sqrt{1-x^2} - 1 + x^2) dx = 2 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} - 2 \int_0^1 (1-x^2) dx \quad ,$$

l'ultima uguaglianza essendo vera in quanto le funzioni integrande sono pari e lintervallo di integrazione simmetrico rispetto l'origine. Con la sostituzione $x = \sin t$, il primo integrale diventa

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\sin t \cos t + t}{2} |_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Osservazione 1 *Saremmo potuti arrivare allo stesso risultato semplicemente osservando che stavamo calcolando l'area del semicerchio di raggio* 1.

L'area di R è dunque pari a

$$\frac{\pi}{2} - 2x|_0^1 + \frac{2}{3} x^3 |_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} \quad .$$

(b) Poniamo $\cos x = t$. Allora $dt = -\sin x dx$. Dobbiamo calcolare

$$\int \frac{1}{\sin x (2 + \cos x)} dx = \int \frac{-\sin x dx}{-\sin^2 x (2 + \cos x)} = -\int \frac{dt}{(2+t)(t^2-1)} \quad .$$

Cerchiamo $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{(t+2)(1+t)(t-1)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{t-1}$$

cioè

$$\begin{cases} -A - 2B + 2C = 1 \\ 3C + B = 0 \\ C + A + B = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni

$$A = \frac{1}{3} \quad , \quad B = -\frac{1}{2} \quad , \quad C = \frac{1}{6}$$

e

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{\sin x(2+\cos x)}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t+2}dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}dt + \frac{1}{6}\int \frac{1}{t-1}dt \\
= \ & \frac{1}{3}\log(\cos x + 2) - \frac{1}{2}\log(\cos x + 1) + \frac{1}{6}\log|\cos x - 1| + C \\
= \ & \log(\frac{\sqrt[3]{\cos x + 2}\cdot\sqrt[6]{1-\cos x}}{\sqrt{\cos x + 1}}) + C \quad .
\end{aligned}$$

Oppure: con le sostituzioni parametriche l'integrale dato risulta essere

$$\int \frac{1+t^2}{3t+t^3}dt = \frac{1}{3}\int \frac{3t^2+3}{t+t^3}dt = \frac{1}{3}\log|t^3+t| + C$$

dove $t = \tan\frac{x}{2}$ (che effettivamente coincide con la famiglia di funzioni trovate nel primo modo).

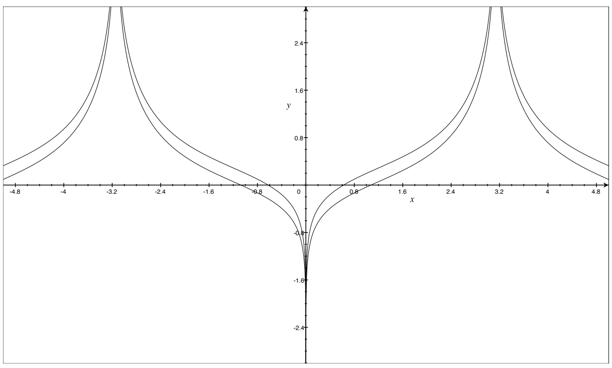

Figura 2: I grafici di $y = \frac{1}{3}\log|(\tan\frac{x}{2})^3 + 3\tan\frac{x}{2}|$ e di $y = \log(\frac{\sqrt[3]{\cos x+2}\cdot\sqrt[6]{1-\cos x}}{\sqrt{\cos x+1}})$

Esercizio 3

(b)

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1+2x) \\ f'(x) &= \frac{2}{1+2x} \\ f''(x) &= -\frac{4}{(1+2x)^2} \\ f'''(x) &= \frac{16}{(1+2x)^3} \\ f^{(iv)}(x) &= -\frac{96}{(1+2x)^4} \end{aligned}$$

In generale, $\forall n \geq 1$:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{2^n(n-1)!}{(1+2x)^n} \quad . \tag{1.1}$$

Per la formula di Taylor con resto di Lagrange sappiamo che esiste $\xi : -\frac{1}{5} \leq \xi \leq \frac{1}{5}$ tale che

$$\log(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - \frac{96}{(1+2\xi)^4}\frac{1}{4!}x^4$$

perciò

$$|\log(1+2x) - (2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3)| \leq \frac{4}{(1+2\xi)^4}\frac{1}{5^4}$$

Ora, dato che $-\frac{1}{5} \leq \xi \leq \frac{1}{5}$, segue che

$$\frac{5}{7} \leq \frac{1}{1+2\xi} \leq \frac{5}{3}$$

perciò possiamo stimare il resto di Lagrange di ordine 3 con

$$\frac{4}{3^4} < \frac{1}{20} = 5 \cdot 10^{-2}$$

e $p_3(x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3$ è un polinomio che nell'intervallo dato approssima $\log(1+x)$ con sufficiente precisione.
Oppure, più in generale:
utilizzando la (1.1), si ha che il resto n-esimo di Lagrange della funzione $\log(1+2x)$ in un intorno dello 0 in modulo è pari a

$$|R_n(\log(1+2x))| = \frac{2^{n+1} \cdot n!}{(n+1)!(1+2\xi)^{n+1}} x^{n+1} \quad ,$$

che possiamo stimare (come prima):

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)(1+2\xi)^{n+1}} x^{n+1} \leq \frac{2^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}} (\frac{5}{3})^{n+1} = (\frac{2}{3})^{n+1} \cdot \frac{1}{n+1}$$

e quest'ultima quantità è minore di $5 \cdot 10^{-2}$ se e solo se $n \geq 3$. Per $n = 3$:

$$\frac{4}{81} \leq \frac{1}{20} \quad .$$

Esercizio 4

$$\int_1^2 \frac{x}{\log x} dx = \int_0^1 \frac{y+1}{\log(1+y)} dy$$

(con $y = x - 1$).

Sviluppando $\log(1+y)$ con il suo polinomio di Maclaurin al primo ordine si ha che la funzione integranda in un intorno dello 0 è asintotica a

$$1 + \frac{1}{y}$$

e quindi

$$\int_0^1 \frac{y+1}{\log(1+y)} dy = +\infty \quad \text{perché} \quad \int_0^1 \frac{1}{y} dy = +\infty \quad .$$

Per discutere la convergenza in un intorno di $+\infty$ osserviamo che esiste $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tale che

$$\frac{x}{\log x} \geq \frac{x}{\sqrt{x}} \quad \forall x \geq x_0$$

e poiché

$$\int_2^{+\infty} \sqrt{x} dx = +\infty$$

diverge anche l'integrale dato.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^2} \int_1^x \frac{t}{\log t} dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x \frac{t}{\log t} dt}{\frac{x^2}{\log x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Applicando il teorema di De l'Hospital e il teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene la seguente uguaglianza

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_2^x \frac{t}{\log t} dt}{\frac{x^2}{\log x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{\log x}}{\frac{2x\log x - x}{\log^2 x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{2\log x - 1} = \frac{1}{2} \quad .$$

Esercizio 5

Per studiare la convergenza dell'integrale dato vicino l'origine sviluppiamo la funzione integranda con i polinomi di Maclaurin delle funzioni:

$$\frac{x^{\frac{3}{2}}(-e^{-x} + \sqrt{1+x})}{2x - \arctan(2x)} \sim \frac{x^{\frac{3}{2}}(1 + x - 1 + \frac{1}{2}x)}{\frac{8}{3}x^3} \quad ,$$

cioè

$$\frac{x^{\frac{3}{2}}(-e^{-x} + \sqrt{1+x})}{2x - \arctan(2x)} \sim \frac{9}{16} x^{-\frac{1}{2}} < x^{-\frac{1}{2}}$$

e dato che

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx < +\infty$$

allora

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{3}{2}}(-e^{-x} + \sqrt{1+x})}{2x - \arctan(2x)} dx < +\infty \quad .$$

In un intorno di $+\infty$ la funzione integranda è positiva e asintoticamente ha il seguente comportamento

$$\frac{x^{\frac{3}{2}}(-e^{-x} + \sqrt{1+x})}{2x - \arctan(2x)} \sim \frac{x^2}{x} = x$$

(perché $e^{-x} \to 0$ e $\sqrt{1+x} \sim \sqrt{x}$ per $x \to +\infty$.) Poiché

$$\int_1^{+\infty} x dx = +\infty \quad ,$$

allora anche

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}(-e^{-x} + \sqrt{1+x})}{2x - \arctan(2x)} dx = +\infty$$

e dunque l'integrale dato diverge.