ESERCITAZIONE 6: STUDIO DI FUNZIONI

Tiziana Raparelli

31/03/2009

1 ESERCIZI

ESERCIZIO 1
Studiare le seguenti funzioni, discuterne l'uniforme continuità e tracciarne un grafico qualitativo.

$$\begin{array}{rrcl} (a) & f(x) & = & \log(x^2-1) \\ (b) & g(x) & = & x \arctan \dfrac{x}{x-1} \\ (c) & h(x) & = & \dfrac{\sqrt{x-x^2}}{2x-1} \\ (d) & l(x) & = & e^{\frac{|x^2-x-2|}{2}} \end{array}$$

ESERCIZIO 2
Determinare gli $a, b \in \mathbb{R}$ per cui la funzione

$$\begin{cases} \cosh x + a \text{ se } x \leq 0 \\ x \log \sqrt{x^2+1} + bx + 1 \quad \text{se } x > 0 \end{cases}$$

risulta derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO 3
Determinare due numeri positivi la cui somma sia s e tali che il loro prodotto sia massimo.

ESERCIZIO 4
Dimostrare che la funzione $f(x) = x + \log x$ non ammette asintoto obliquo, pur essendo finito e non nullo il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad .$$

2 SOLUZIONI

ESERCIZIO 1
(a) Dom(f) $= (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
Osservazione: f è pari, basta quindi studiarla nell'intervallo $(1, +\infty)$ e riportare il grafico nell'altro intervallo per simmetria rispetto all'asse delle y.
Segno di f:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 1 \Leftrightarrow x > \sqrt{2} \text{ e } x < -\sqrt{2}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \quad .$$

Ricerca degli asintoti:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

quindi la retta $x = 1$ è asintoto verticale (da destra) di $f(x)$ (e per la parità della funzione, anche $x = -1$ è asintoto verticale (da sinistra)).

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

quindi f non ha asintoti orizzontali né obliqui.
Intervalli di monotonia, massimi e minimi locali: studio della derivata prima

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} \neq 0 \quad \forall x$$

(perché $x = 0 \notin Dom(f)$). Dallo studio del segno di f' segue che $f(x)$ è strettamente decrescente in $(-\infty, -1)$ e strettamente crescente in $(1, +\infty)$.
Convessità di f: studio della derivata seconda

$$f''(x) = -2\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} < 0 \quad \forall x$$

e quindi f è concava $\forall x$.

f non è U.C. perché non è prolungabile ad una funzione continua né in 1 né in -1.

Osservazione 2.1. *Le funzioni che ammettono asintoto verticale non sono U.C. nel proprio campo d'esistenza.*

(b) Dom(g) $= (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.
Intersezione con gli assi:

$$g(0) = 0$$

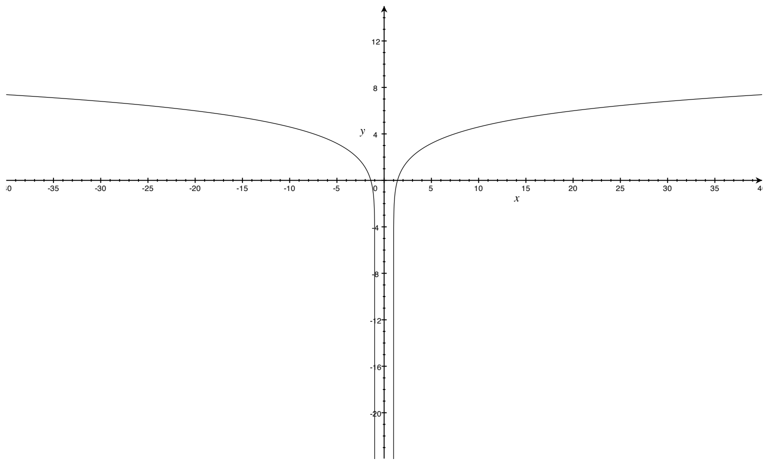

Figura 1: Il grafico di $y = \log(x^2 - 1)$

g passa per l'origine degli assi.
Studio del segno:

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ e } \frac{x}{x-1} > 0 \quad ,$$

cioè se $x > 1$.
Ricerca degli asintoti:

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} = \pm\frac{\pi}{2}$$

g non ammette asintoti verticali.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

g non ammette asintoti orizzontali. La retta di equazione $y = \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2}$ è asintoto obliquo di g sia a $+\infty$, sia a $-\infty$.
Intervalli di monotonia, massimi e minimi locali: studio della derivata prima.

$$g'(x) = \arctan\frac{x}{x-1} - \frac{x}{(x-1)^2 + x^2}$$

È facile vedere che $g'(0) = 0$, ma non altrettanto studiare il segno di g' o sue ulteriori radici. Studiamo quindi la derivata seconda:

$$g''(x) = \frac{2x-2}{((x-1)^2 + x^2)^2} \neq 0 \quad \forall x$$

(perché $x = 1 \notin \mathrm{Dom}(g)$). Dallo studio del segno di g'' segue che g è concava e g' è strettamente decrescente se $x < 1$, mentre g è convessa e g' è strettamente crescente se $x > 1$. Poiché

$$\inf_{(1,+\infty)} g' = \lim_{x\to 1^+} g'(x) = \frac{\pi}{2} - 1$$

è maggiore di 0, allora $g'(x) > 0$ $\forall x \in (1, +\infty)$ e dunque g è strettamente crescente in $(1, +\infty)$.
In $(-\infty, 1)$ g' è decrescente e cambia di segno, quindi esiste un unico punto in cui $g'(x) = 0$ $(x = 0)$, che è un punto di massimo relativo per g. (g cresce in $(-\infty, 0)$ e decresce in $(0, 1)$).
g è U.C. negli intervalli della forma $[a, +\infty)$, e $(-\infty, -a]$, con $a > 1$, perché è continua e ammette asintoto obliquo, non è U.C. in tutto il suo dominio perché in 1 non ammette prolungamento continuo.

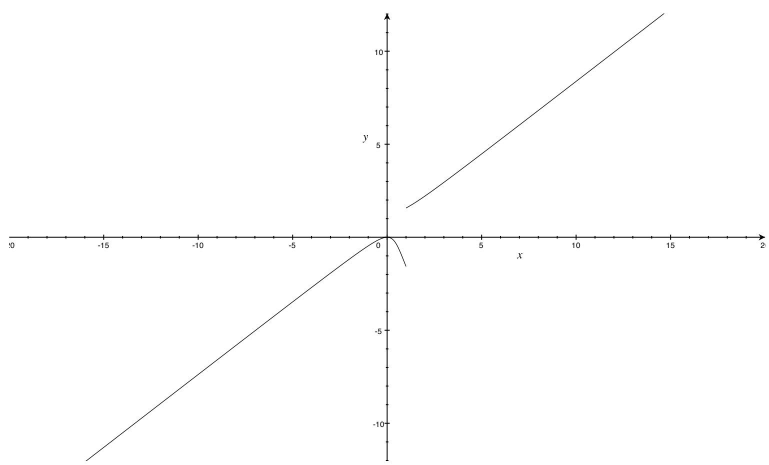

Figura 2: Il grafico di $y = x \arctan \frac{x}{x-1}$

(c) $\mathrm{Dom}(h) = [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$.
Intersezioni con gli assi e studio del segno:

$$h(0) = h(1) = 0 \quad \text{e} \quad h > 0 \quad \forall x \in (\frac{1}{2}, 1)$$

(h passa per i punti $(0, 0)$ e $(1, 0)$).
Ricerca degli asintoti:

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^{\pm}} h(x) = \pm\infty$$

$x = \frac{1}{2}$ è asintoto verticale (da destra e da sinistra).
Intervalli di monotonia, massimi e minimi locali: studio della derivata prima.

$$h'(x) = -\frac{(2x-1)^2 + 4(x-x^2)}{2\sqrt{x-x^2}(2x-1)^2}$$

è definita in $(0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ e nell'intervallo dato si vede facilmente che è sempre negaiva, quindi g è strettamente decrescente. I punti $0, 1$ sono punti di cuspide perché $|h'_+(0)| = |h'_-(-1)| = +\infty$. Ciò significa che h è concava in un intorno di 0 e in un intorno di 1. Provando a tracciare il grafico di h, anche senza lo studio della derivata seconda, si osserva che h deve cambiare di convessità (almeno una volta) fra 0 e $\frac{1}{2}$ e (almeno una volta) fra $\frac{1}{2}$ e 1. Riguardo l'U.C. h non è U.C. perché ammette asintoto verticale.

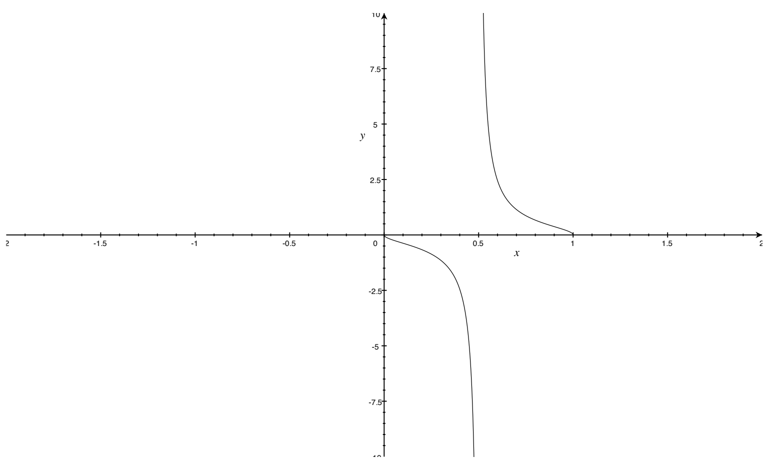

Figura 3: Il grafico di $y = \frac{\sqrt{x-x^2}}{2x-1}$

(d) $\mathrm{Dom}(l) = \mathbb{R}$.

$$l(x) > 0 \quad \forall x \quad .$$

Ricerca degli asintoti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} l(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{l(x)}{x} = \pm\infty \quad .$$

l non ammette asintoti.
Intervalli di monotonia, massimi e minimi locali: studio della derivata prima.

$$l'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{|x^2-x-2|}{2}} sign(x^2 - x - 2)(2x-1) \quad .$$

$$\mathrm{Dom}(l') = \mathbb{R} - \{-1, 2\} \quad \text{e} \quad l'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad .$$

Dallo studio del segno di l' si evince che $l(x)$ è strettamente decrescente in $(-\infty, -1)$ e in $(\frac{1}{2}, 2)$ e strettamente crescente altrimenti.

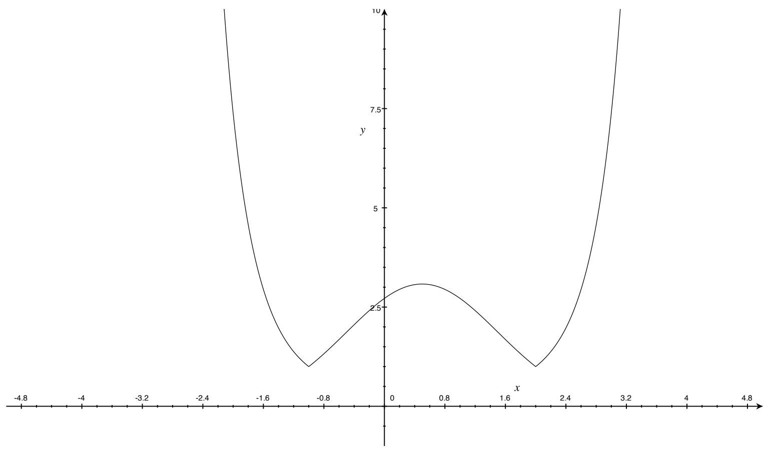

Figura 4: Il grafico di $y = e^{\frac{|x^2-x-2|}{2}}$

ESERCIZIO 2

Bisogna studiare la continuità e la derivabilità in 0. Per la continuità deve essere

$$\lim_{x\to 0^-} \cosh(x) + a = \lim_{x\to 0^+} x \log\sqrt{x^2+1} + bx + 1$$

da cui

$$1 + a = 1 \Leftrightarrow a = 0 \quad .$$

f è continua per $a = 0$ e per ogni $b \in \mathbb{R}$.

Per la derivabilità in 0 deve essere

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\cosh h - 1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h \log\sqrt{1+h^2} + bh + 1 - 1}{h}$$

cioè

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{1}{2}\frac{e^h - 1}{h} - \frac{1}{2}\frac{e^{-h}-1}{-h} = 0 = \lim_{h\to 0^+} \log\sqrt{1+h^2} + b = b$$

e quindi f è derivabile in tutti i punti del suo dominio se e e solo se $a = b = 0$.

ESERCIZIO 3

Siano $x, q > 0$ e tali che $x + q = s$. Allora $q = s - x$. Vogliamo trovare per quale valore di x la funzione

$$f(x) = x \cdot q = x \cdot (s - x)$$

ammette il suo valore massimo. Per fare questo studiamo i punti in cui la derivata prima si annulla:

$$f'(x) = s - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{s}{2}$$

e per tale x la funzione ammette un massimo locale. Bisogna dimostrare che $f(\frac{s}{2})$ è un massimo assoluto, andando a verificare il comportamento della funzione agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$$

e effettivamente $x = \frac{s}{2}$ è punto di massimo assoluto, quindi i numeri cercati sono $x = q = \frac{s}{2}$.

ESERCIZIO 4

Effettivamente

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

ma

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$$

dunque non esiste l'asintoto obliquo.