ESERCITAZIONE 12: FORMULA DI TAYLOR E INTEGRALI IMPROPRI

Tiziana Raparelli

26/05/2009

1 Conoscenze preliminari

Definizione 1.1. *Siano* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in A$ *tali che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \quad .$$

Si dice che f *è un "o piccolo di* g*" (e si scrive* $f(x) = o(g(x))$*) per* $x \to x_0$ *se*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad .$$

Esempi

$$
\begin{array}{ll}
(1) & f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = x \Rightarrow f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \to 0 \\
(2) & f(x) = \log(1+x) \quad , \quad g(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \to 0 \\
(3) & \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad (x - x_0)^{n+1} = o((x - x_0)^n) \text{ per } x \to x_0 \quad .
\end{array}
$$

Proprietà degli o piccoli

Siano $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, allora

$$
\begin{array}{rl}
(i) & o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^m) \\
(ii) & o(x^n) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n}) \\
(iii) & x^n \cdot o(x^m) = o(x^{m+n}) \\
(iv) & \dfrac{o(x^n)}{o(x^m)} = o(x^{n-m}) \\
(v) & o(ax^n) = o(x^n) \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad .
\end{array}
$$

Teorema 1.1 (Formula di Taylor con resto di Peano)**.** *Sia $f(x)$ una funzione derivabile n volte in un x_0, allora in un intorno di x_0 risulta*

$$f(x) = \sum_{k_0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad .$$

2 Esercizi

ESERCIZIO 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x + \frac{1}{3}x^3}{e^{x^5} - 1} \quad .$$

ESERCIZIO 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(\sin x) + \log(1 - 2x)}{e^{2x} - 1} \quad .$$

ESERCIZIO 3

Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1 - \alpha \log x}{(1 - x)^2}$$

sia finito.

ESERCIZIO 4

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1} \quad .$$

ESERCIZIO 5

Sia $f(x)$ la funzione definita su $\mathbb{R}$ da

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad ;$$

Studiare la convergenza di f e dimostrare che l'equazione

$$f(x) = 1 - x$$

ha un'unica soluzione su $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO 6

Studiare la convergenza di

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} \qquad \int_1^2 \frac{dx}{x-\sqrt[3]{x}} \\
&\text{(b)} \qquad \int_{-1}^1 \frac{\sin x + 1}{\sqrt{|x|}} dx \\
&\text{(c)} \qquad \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx \\
&\text{(d)} \qquad \int_0^1 \frac{(e^{-x+1}-1)\sqrt{\sin x}}{(1-x)^{\frac{5}{4}}} dx \quad .
\end{aligned}
$$

ESERCIZIO 7

Calcolare $\log(2)$ con un errore inferiore a $\frac{1}{5}$.

3 Soluzioni

ESERCIZIO 1

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x + \frac{1}{3}x^3}{e^{x^5}-1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4!} - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{1}{3}x^3 + o(x^6)}{1 + x^5 - 1 + o(x^5)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{30}x^5 + o(x^6)}{x^5 + o(x^5)} = \frac{1}{30} \quad .
\end{aligned}
$$

ESERCIZIO 2

$$
\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \qquad \log(1-2x) = -2x - 2x^2 + o(x^2) \qquad e^{2x} = 1 + 2x + o(x)
$$

allora

$$
\lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(\sin x) + \log(1-2x)}{e^{2x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x - 2x - 2x^2 + o(x^2)}{2x + o(x)} = 0 \quad .
$$

ESERCIZIO 3

Sia $y = x - 1$, allora

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1 - \alpha \log x}{(1-x)^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(y+1)^2 - \alpha \log(1+y)}{y^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(2-\alpha)y + (1+\frac{\alpha}{2})y^2 + o(y^2)}{y^2} \\
&= \begin{cases} 2 & \text{se } \alpha = 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 2 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 4

Con la sostituzione $y = \frac{1}{x}$ si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1} \\
&= \lim_{y\to 0^+} \frac{e^y - 1}{\sqrt{1+y} - 1} \\
&= \lim_{y\to 0^+} \frac{y + o(y)}{\frac{1}{2}y + o(y)} = 2 \quad .
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 5

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x e^{-t^2} dt & \text{se } x \geq 0 \\ -\int_x^0 e^{-t^2} dt & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Studiamo prima il comportamento di $f(x)$ agli estremi del dominio.

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

Poiché e^{-t^2} è una funzione pari l'integrale cercato è pari a

$$2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

e perciò basta studiare la convergenza (in un intorno di $+\infty$) di quest'ultimo.
Dato che

$$\frac{1}{e^{t^2}} < \frac{1}{t^2} \quad \forall t$$

e

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt < +\infty$$

allora per il teorema del confronto degli integrali impropri anche l'integrale dato converge e questo significa che $f(x)$ ammette un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Per quanto detto precedentemente f è limitata (e ammette asintoto orizzontale) anche per $x \to -\infty$. $g(x)$ è una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ decrescente, $f(x)$ invece è crescente su $\mathbb{R}$ poiché $f'(x) = e^{-x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Le due funzioni si incontreranno dunque in uno e un solo punto.

ESERCIZIO 6

(a) Con la sostituzione $y = x - 1$ si ha che

$$\int_1^2 \frac{dx}{x - \sqrt[3]{x}} = \int_0^1 \frac{dy}{1 + y - \sqrt[3]{1+y}}$$

di cui bisogna studiare la convergenza in 0. La funzione integranda vicino l'origine è asintotica a

$$\frac{1}{y - \frac{1}{3}y} \sim \frac{1}{y}$$

e

$$\int_0^1 \frac{1}{y} dy = +\infty$$

perciò diverge anche l'integrale dato.

(b)

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin x + 1}{\sqrt{|x|}} dx = \int_{-1}^0 \frac{\sin x + 1}{\sqrt{-x}} dx + \int_0^1 \frac{\sin x + 1}{\sqrt{x}} dx$$

e

$$\frac{\sin x + 1}{\sqrt{|x|}} \leq \frac{2}{\sqrt{|x|}} \quad \forall x \in [-1, 1]$$

l'integrale di quest'ultima funzione fra $[-1, 1]$ converge, quindi converge anche l'integrale dato.

(c)

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx + \int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

che non esiste perché limite destro e limite sinistro sono divergenti.

(d) Sia $y = 1 - x$, allora

$$\int_0^1 \frac{(e^{-x+1} - 1)\sqrt{\sin x}}{(1-x)^{\frac{5}{4}}} dx = -\int_0^1 \frac{(e^y - 1)\sqrt{\sin(1-y)}}{y^{\frac{5}{4}}} dy \quad .$$

Studiamo la convergenza assoluta dell'integrale dato:

$$|-\int_0^1 \frac{(e^y-1)\sqrt{\sin(1-y)}}{y^{\frac{5}{4}}}dy| = \int_0^1 \frac{(e^y-1)\sqrt{\sin(1-y)}}{y^{\frac{5}{4}}}dy \quad .$$

Possiamo maggiorare la funzione integranda con $\frac{(e^y-1)}{y^{\frac{5}{4}}}$ che si vede (approssimando e^y con il suo polinomio di Mac Laurin al primo ordine) che vicino l'origine si comporta come

$$\frac{1}{y^{\frac{1}{4}}}$$

il cui i integrale fra 0 e 1 è convergente, perciò anche l'integrale dato converge (assolutamente e quindi anche semplicemente) .

ESERCIZIO 7

Poiché $\log 2 = \log(1+x)\big|_{x=1}$ possiamo stimarlo con la formula di Taylor con resto di Lagrange (centrata in 0 e sostituendo alla x il valore 1). La derivata quinta di $\log(1+x)$ calcolata in un opportuno punto $\xi \in (0,1)$ è pari a

$$\frac{24}{(1+\xi)^5}$$

quindi per la formula di Taylor con resto di Lagrange

$$\log(1+x)|x =_1 = [x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{24}{(1+\xi)^5}\frac{x^5}{5!}]_{x=1} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5(1+\xi)^5}$$

da cui

$$|\log 2-(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4})| \leq |\frac{1}{5(1+\xi)^5}| < \frac{1}{5}$$

perciò il numero $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$ stima $\log 2$ con la precisione richiesta.