AM1 2009-2008: II ESONERO- 12/01/2009

Esercizio 1- Si detrminino estremo superiore e inferiore, ed eventualmente massimo e minimo, dei seguenti insiemi:

Calcolare i seguenti limiti di successioni:

(a)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^5 + \ n^2 + \log n}{7n^5 + 2n + 4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^5(1 + \frac{1}{n^3} + \frac{\log n}{n^5})}{n^5(7 + \frac{2}{n^4} + \frac{4}{n^5})} = \frac{1}{7};$$

(b)

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n+11} - \sqrt{2n+4}}{\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-n}} \\ = \ &\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n+11} - \sqrt{2n+4}}{\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-n}} \frac{\sqrt{2n+11} + \sqrt{2n+4}}{\sqrt{2n+11} + \sqrt{2n+4}} \frac{\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2-n}}{\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2-n}} \\ = \ & \frac{2n+11-2n-4}{n^2+2n-n^2+n} \frac{\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2-n}}{\sqrt{2n+11} + \sqrt{2n+4}} = 0; \end{aligned}$$

(c)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(3^n + n^2)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log[3^n(1 + \frac{n^2}{3^n})]}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log 3^n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n \log 3}{n} = \log 3;$$

(d)

$$\lim_{n\to+\infty} n^2(e^{1-\cos(\frac{1}{n})} - 1) \sin\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{1-\cos(\frac{1}{n})} - 1}{1 - \cos(\frac{1}{n}} (1 - \cos(\frac{1}{n})) \frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 0;$$

(e)

$$\lim_{n\to+\infty} 3^n(2^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{n\to+\infty} 3^n(e^{\log 2^{\frac{1}{n}}} - 1) = \lim_{n\to+\infty} 3^n(e^{\frac{\log 2}{n}} - 1) = \lim_{n\to+\infty} 3^n \frac{1}{n} \log 2 \frac{e^{\frac{\log 2}{n}} - 1}{\frac{\log 2}{n}} = +\infty;$$

ricordando i seguenti limiti notevoli:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(a_n+1)}{a_n} = 1; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1; \quad \lim_{n\to+\infty} (1 + a_n)^{1/a_n} = e; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1$$

dove a_n é una successione t. c. $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$.

Esercizio 2- Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $E =]-\frac{\pi}{2}, 1[\cup \{ \tan(\frac{2n-1}{4n}\pi) \; : \; n \in \mathbb{N}^+ \}$. Si trovino i punti di accumulazione di E, i punti isolati, i punti interni.
Si trovi la chiusura di E, si stabilisca se E è un insieme chiuso, se è un insieme aperto, se è limitato.
Si trovino $\inf E$, $\sup E$ e si stabilisca se esistono minimo e/o massimo di E.
Punti di accumulazione: $[-\frac{\pi}{2}, 1] \cup \{ +\infty \}$;
Punti isolati: $\{ \tan(\frac{2n-1}{4n}\pi) \; : \; n \in \mathbb{N}, n \leq 2 \}$;
Punti interni: $]-\frac{\pi}{2}, 1[$;
$\bar{E} = [-\frac{\pi}{2}, 1]$;
E é illimitato superiormente e limitato inferiormente; $\inf E = -\frac{\pi}{2}$, non esiste minimo, $\sup E = +\infty$. E non é chiuso perché non contiene tutti i suoi punti di accumulazione. E non é aperto perché tutti i suoi punti non sono punti interni.

Esercizio 3- Stabilire se il seguente insieme é aperto o chiuso: $\{ x \in \mathbb{R} \; : \; (4x^2 - 7x + 3) \neq 0 \}$.
Risolvendo l'equazione di secondo grado: $4x^2 - 7x + 3 \neq 0 \iff x \neq 1,\, x \neq \frac{6}{8}$. Pertanto $\{ x \in \mathbb{R} \; : \; (4x^2 - 7x + 3) \neq 0 \} = \mathbb{R} \setminus \{ 1, \frac{6}{8} \}$, che é aperto, ad esempio perché unione finita di aperti o é il complementare di un chiuso.

Esercizio 4- Studiare la convergenza ed eventualmente la convergenza assoluta delle seguenti serie:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{k}{k-2})^n$, $k \in \mathbb{R}$;
é una serie geometrica di ragione $\frac{k}{k-2}$, che converge per

$$|\frac{k}{k-2}| < 1 \iff -1 < \frac{k}{k-2} < 1 \iff \frac{k-k+2}{k-2} < 0 \text{ e } \frac{k+k-2}{k-2} > 0$$

risolvendo otteniamo $k < 2$ e $k < 1 \;\; k > 2$ otteniamo che la serie converge per $k < 2$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\cos(\pi\, n)}{n^3+3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^3+3}$, poiché, per $n \to +\infty$, $\frac{\sqrt{n}}{n^3+3} \approx \frac{1}{n^{5/2}}$, la nostra serie converge assolutamente e dunque anche semplicemente.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+2}$, la serie é convergente per il criterio di Leibnitz, infatti $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+2} = 0$ e il termine a_n é monotono decrescente, $\frac{1}{\sqrt{n+1}+2} \leq \frac{1}{\sqrt{n}+2}$.
Per l'assoluta convergenza dobbiamo studiare la serie dei moduli: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+2}$, che si comporta come una serie armonica generalizzata di esponente piú piccolo di 1, quindi diverge.

Esercizio 5-

- Definizione di successione e di limite di una successione.
- Teorema degli zeri. (enunciato e dimostrazione)
- Che cosa afferma il Principio di Induzione?

- Dare un esempio di successione che gode della seguente proprietá:

$$a_n \ \ t.c. \ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q, \ \ 0 \leq q < 1.$$