

Appello B di AC1 - 16/6/2009

1) [10 punti] Calcolare

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{1+x^4} dx.$$

2) [10 punti] Determinare lo sviluppo in serie di Laurent di

$$f(z) = \frac{(6z^2 - 3z^3) + (z^6 - 2z^3 + 1)}{(2-z)(1-z^3)^2}$$

nelle regioni $\{|z| < 1\}$, $\{1 < |z| < 2\}$ e $\{|z| > 2\}$.

3) [10 punti] Sia $g(z) = z^4 - 1$ e z_j , $j = 0, 1, 2, 3$, i quattro zeri distinti di $g(z)$.

a) Mostrare che

$$\min_{z \in \partial B_r(z_j)} |g(z)| \geq r(\sqrt{2} - r)^3 \quad \forall 0 < r < \sqrt{2}.$$

b) Calcolare la quantità

$$\max_{r \in [0, \sqrt{2}]} r(\sqrt{2} - r)^3.$$

c) Determinare il numero di zeri distinti di $f(z) = z^4 + \frac{3}{16}z - 1$ e la loro molteplicità.