

MC/6
STORIA DELLA MATEMATICA 1
A.A. 2007-2008
ANA MILLÁN GASCA

LA MATEMATICA ALL'ALBA DELLA CIVILTÀ

All'inizio fu lo scriba, cap. 1

APPENDICE 1 RAPPRESENTAZIONE DEI NUMERI E SISTEMI DI NUMERAZIONE

Si veda anche:

VV. AA., con prefazione di Gaetano Fichera, *L'alba dei numeri*, Edizioni Dedalo, Bari, 1987.

GEORGES IFRAH, *Storia universale dei numeri*, Arnoldo Mondadori Editore, Milano, 1989.

RICHARD COURANT, HERBERT ROBBINS, *Che cos'è la matematica*, Torino, Bollati

Boringhieri, Torino, 2000 (2° edizione), pp.

BIBLIOGRAFIA

Tra i lavori classici ricordiamo:

NEUGEBAUER, OTTO, *Le scienze esatte nell'antichità*, Milano, Feltrinelli, 1974.

BARTEL VAN DER WAERDEN, *Science awakening*, Groningen, Noordhoff, 1954.

BARTEL VAN DER WAERDEN, *Geometry and algebra in ancient civilisation*, Berlin, Springer, 1983.

Per avere un'idea della ricerca specialistica più recente, che ha modificato in parte la visione della matematica antica, citiamo:

JORAN FRIBERG, *Unexpected Links Between Egyptian and Babylonian Mathematics*, Singapore, World Scientific Publishing, 2007.

JENS HØYRUP, *In measure, number, and weight*, New York, State University of New York Press.

Per sapere di più sulla divinazione mesopotamica:

MARIO LIVERANI, *Antico Oriente. Storia, società, economia*, Laterza, Roma-Bari, 2006

e anche i capitoli sull'argomento della *Storia della Scienza*, vol. 1 *La scienza antica*, Istituto della Enciclopedia Italiana Treccani, Roma, 2000.

DIARIO DELLE LEZIONI

Venerdì 7 marzo 2008 (seconda ora)

Computo, numerazione e scrittura

Martedì 11 marzo 2008

I sistemi di numerazione protocuneiformi: numero astratto, numero concreto

Il sistema di numerazione sessagesimale posizionale ereditato babilonese (si veda *All'inizio fu lo scriba*, pp. 10-11)

La matematica pratica come calcolo utile

Esempio 1 Una tavoletta sumerica ritrovata del 2650 a.C. ca. (tratta da G. Guitel 1963, "Signification mathématique d'une tablette sumerienne", *Revue d'assyriologie et d'archéologie*, 57: 145-150)

Esempio 2 Una tavoletta babilonese dell'antica Susa risalente al 1500 a.C. ca. (tratta da E. M. Bruins, M. Rutten 1961, *Mémoires de la mission archéologique en Iran, tome 34, Textes mathématiques de Suse*, Librairie orientaliste Paul Geuthner, Paris)

(traduzione italiana dei testi di Livia Giacardi, "Sistema di numerazione e calcolo algebrico nella terra tra i due fiumi", in *L'alba dei numeri*.)

Esempio 3 Una tavoletta del periodo seleucide (III secolo a.C.) – *All'inizio fu lo scriba*, pp. 12-13

Martedì 18 marzo 2008

Tavolette babilonesi e papiri egizi: oltre il calcolo utile

1. Problemi ricreativi e proprietà generali dei numeri naturali

Esempio 4 Il problema 79 del papiro Rhind (*All'inizio fu lo scriba*, pp. 26-27) e i problemi ricreativi

Esempio 5 L'algoritmo di moltiplicazione per duplicazioni successive nei testi egizi

2. Numeri, dei e cosmologia

Esempio 6 I due sistemi di misura degli angoli e del tempo in uso attualmente sono un'eredità del sistema di notazione numerico ereditato dagli scribi babilonesi a partire dal XIX secolo a. C. circa. Ecco un testo mesopotamico dove il dio Marduk, che occupava il ruolo supremo nel pantheon babilonese, "scrive" un numero adoperando questo sistema di rappresentazione scritta:

"Dopo avere iscritto sulla tavoletta dei Destini il numero di settanta anni per l'oblio di Babilonia, il dio Marduk ebbe pietà e tornò sulla sua decisione. Invertì l'ordine delle cifre e decise così che questa città sarebbe stata recuperata dopo undici anni"

(Dalla *Pietra nera* di Asarhadon, re degli Assiri, 680-669 a.C.; Asarhadon ricostruì la città di Babilonia undici anni dopo la sua distruzione da parte del padre Senaquerib, avvenuta nel 689 a.C.)

Venerdì 28 marzo 2008

Numeri, dei e cosmologia (continua)

Esempio 7 Le frazioni dell'occhio di Horus (*All'inizio fu lo scriba*, p.17)

La divinazione babilonese, la raccolta di presagi celesti *Enuma Anu Enlil* e le origini dell'astronomia antica

“[i dei sono] coloro che valutano la legge del paese, determinano i destini, tracciano i disegni cosmici, assegnano le sorti del cielo e della terra [e sono invocati perché] è nelle vostre mani decidere i destini e tracciare i disegni cosmici; voi determinate le sorti della vita, ne tracciate il disegno e regolate le decisioni”
(Dal poema epico della creazione *Enuma elis* (Quando in alto), racconto dell'ascesa del dio Marduk al ruolo supremo nel pantheon babilonese)

APPENDICE 1 RAPPRESENTAZIONE DEI NUMERI E SISTEMI DI NUMERAZIONE

Gioverà ricordare che è importante distinguere il *numero* che indica gli oggetti di un dato insieme dal *simbolo* usato per scriverlo, simbolo che è una convenzione. Ad esempio, i simboli

$$10 \quad X \quad \cap$$

rappresentano graficamente lo stesso numero rispettivamente nel sistema di numerazione di origine indoarabica, nel sistema di numerazione romano e nel sistema di numerazione antico egizio, così come i *numerali* «due», «two», «dos» indicano lo stesso numero in tre lingue moderne diverse.

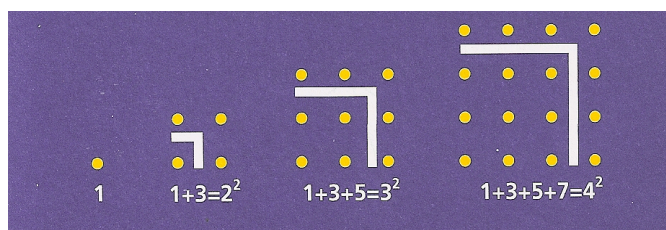
Allo stesso modo, anche i due simboli

$$\frac{1}{2} \quad 0,5$$

sono due notazioni che designano uno stesso numero (non più però un numero naturale, bensì un numero razionale). Si tratta di due notazioni moderne, che usano le cifre indoarabiche e in più la linea di frazione e la virgola.

La notazione *letterale* dell'algebra, ossia l'uso delle lettere per rappresentare i numeri, rende più evidente la differenza fra il concetto astratto di numero e la sua rappresentazione.

Per non confondere il concetto astratto di numero con la sua rappresentazione scritta si possono usare dei modelli concreti (materiali o virtuali). Ad esempio, Richard Courant e Herbert Robbins, nel classico *Che cos'è la matematica*, presentano un modello che pensa i numeri con palline poste in scatole rettangolari, che possono essere anche realizzate materialmente. Anche i pitagorici usavano dei modelli geometrici, poiché rappresentavano i numeri come aggregati di punti, e anzi la loro disamina dei naturali includeva lo studio di disposizioni geometriche particolari, i cosiddetti *numeri figurati*, quali i *numeri triangolari* 1, 3, 6, 10, ... i *numeri quadrati*, 1, 4, 9, 16, ... (si veda la figura), i *numeri pentagonali* e così via.



Nella Cina antica, indipendentemente dalla scrittura dei numeri, per eseguire gli algoritmi si usava una procedura basata su una rappresentazione dei numeri grazie a bastoncini (*suan*) disposti su una superficie di calcolo seguendo una regola posizionale decimale.

La ricerca moderna sull'insegnamento della matematica ha anche introdotto dei modelli concreti dei numeri. Il maestro belga Emile-Georges Cuisenaire (1891-1976) introdusse nella sua scuola della cittadina di Thuin i regoli colorati (presentati nel suo lavoro del 1952 *I numeri in colore*) oggi diffusi in tutto il mondo. La ricercatrice belga Frédérique Papy, studiosa dell'insegnamento elementare della matematica, suggerì una rappresentazione dei numeri naturali con pedine disposte su una tavola di calcolo. La stessa funzione hanno i blocchi multibase dello studioso di origine ungherese Zoltan Dienes.

Il numero zero è un esempio di particolare importanza per riflettere sulla differenza fra il numero e la sua rappresentazione. Si tratta di un concetto astratto che è nato in collegamento con un segno grafico o introdotto in India per indicare una posizione vuota e rendere quindi pienamente operativo il sistema di numerazione decimale posizionale, originario da questa regione del mondo. In questo caso, dalle esigenze di scrittura dei numeri, più che dalle riflessioni sul numero in astratto, è nato il concetto astratto di un numero zero che si è aggiunto ai numeri naturali e può essere maneggiato come uno di essi; anzi lo zero è il primo passo dell'estensione del sistema dei numeri nella matematica. Ovviamente lo zero è un numero speciale, che ha suscitato molte riflessioni filosofiche e religiose. La matematica si è sviluppata a cavallo fra la sfera astratta del pensiero e le mille sollecitazioni dell'attività umana.

I sistemi di numerazione

Un *sistema di numerazione* è un insieme di segni grafici o *cifre* e una procedura di notazione per scrivere i numeri. Vi sono stati storicamente due tipi fondamentali di procedure, basati rispettivamente sul principio additivo e su quello di posizione.

In un sistema di numerazione *additivo*, si scrivono una serie di segni numerici, se necessario ripetendoli, uno accanto all'altro, e il numero rappresentato è la somma totale dei valori dei segni.

Ovviamente è possibile rappresentare qualsiasi numero in tal modo (e basta avere un simbolo per l'unità), anche se può essere molto farraginoso. Il sistema di numerazione egizio nella scrittura geroglifica, ad esempio, usava sei diversi simboli: la tacca per l'unità e l'ansa, la corda a spirale, il fiore di loto, il dito alzato, il girino e il dio che indicavano le prime sei potenze di dieci. Così,



stava ad indicare 34 (quattro tacche e tre anse). Anche il sistema dei numeri romani era essenzialmente additivo.

Il sistema di numerazione posizionale decimale, oggi il più usato in tutto il mondo, è molto efficace e rende molto facile eseguire le operazioni. È basato sull'uso di soli dieci segni o cifre (originari dall'India): 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ... e lo 0, che ha un ruolo chiave (l'idea di avere un segno per indicare il "niente" non era per niente "naturale"). In generale, per scrivere un numero qualsivoglia (lo scriviamo quindi simbolicamente con una lettera, n) si considera la sua decomposizione nel modo seguente

$$n = a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + a_3 \times 10^3 + \dots + a_k \times 10^k$$

e quindi il numero si scrive accostando le cifre nel modo seguente:

$$a_k \dots a_3 a_2 a_1 a_0$$

In un sistema di numerazione *posizionale* il valore dei segni o cifre dipende dalla loro posizione. Il sistema si dice *in base b* se si ha a disposizione b cifre (di cui una indica la posizione vuota) e il valore posizionale dei segni è collegato alle successive potenze della base. Per scrivere un numero n qualsivoglia in base b bisogna decomporlo nel modo seguente:

$$n = a_0 \times b^0 + a_1 \times b^1 + a_2 \times b^2 + a_3 \times b^3 + \dots + a_k \times b^k$$

e quindi il numero si scrive accostando i segni $(a_k \dots a_3 a_2 a_1 a_0)_b$

Per esempio, in base 8, conservando gli stessi simboli (da 0 a 7), il numero che abbiamo appena scritto ha un'interpretazione diversa:

$$7402_8 = 2 \times 8^0 + 0 \times 8^1 + 4 \times 8^2 + 7 \times 8^3 = 3842_{10}$$

La civiltà Maya, che fiorì in America centrale nei secoli 300 a.C.-900, faceva uso di una scrittura geroglifica e di un sistema di numerazione in base 20 che adoperava i due simboli | (cinque unità) e • (l'unità). Nei testi riguardanti la cronologia maya, è usata anche una notazione posizionale in disposizione verticale, con le unità nella posizione più in basso.

Ecco, per chiudere, quanto scriveva Laplace sul pensiero di Leibniz in relazione alla scrittura posizionale binaria dei numeri:

«Leibniz vide in questa aritmetica binaria l'immagine della creazione. Egli immaginò che l'Unità rappresentasse Dio e lo zero il vuoto, e che l'Ente supremo avesse tratto tutti gli esseri dal vuoto, precisamente come l'unità e lo zero esprimono tutti i numeri in questo sistema di numerazione»

LETTURA 1

Leggiamo l'inizio del primo capitolo del libro classico Che cos'è la matematica scritto da Richard Courant in collaborazione con Herbert Robbins. Gli autori scrivono che «i linguaggi primitivi danno al numero un senso concreto»: quale è il senso di questa affermazione? Osservi il contrasto da loro ricordato tra il ruolo del numero nella matematica antica (la matematica greca) e nella matematica moderna.

Il numero è la base della matematica moderna. Ma che cos'è il numero? Che cosa significa dire che $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; e $(-1) \cdot (-1) = 1$? A scuola si apprende il meccanismo del calcolo delle frazioni e dei numeri negativi, ma per una vera comprensione del sistema dei numeri si deve tornare indietro, ad elementi più semplici. Mentre i greci scelsero come base della loro matematica i concetti geometrici di punto e retta, è un principio direttivo moderno che le proposizioni della matematica debbano essere in definitiva riducibili a proposizioni sui numeri naturali 1,2,3,...“Dio creò i numeri naturali; tutto il resto è opera dell'uomo”: con queste parole Leopold Kronecker (1823-1891) indicava il terreno sicuro per la costruzione dell'edificio matematico.

Creati dalla mente umana per contare gli oggetti di vari insiemi, i numeri non hanno alcun riferimento alle caratteristiche individuali degli oggetti contati. Il numero sei è

un'astrazione di tutti gli effettivi insiemi contenenti sei oggetti; esso non dipende da nessuna delle qualità specifiche di tali oggetti né dai simboli usati. Soltanto in uno stadio intellettualmente piuttosto evoluto diventa chiaro il carattere astratto dell'idea di numero. Per i bambini i numeri rimangono sempre collegati a oggetti tangibili, come dita o granelli, e i linguaggi primitivi danno al numero un senso concreto, attribuendo nomi diversi ai numeri che rappresentano oggetti di tipo diverso.

Fortunatamente il matematico, come tale, non ha bisogno di interessarsi della natura filosofica del passaggio da insiemi di oggetti concreti al concetto astratto di numero. Accetteremo perciò i numeri naturali come dati, assieme alle due operazioni fondamentali, addizione e moltiplicazione, con cui si possono combinare.

Lettura 2 Sapere pratico-operativo, sapienza religiosa e scienza nelle prime civiltà

Nelle prime civiltà il sapere tecnico si allarga e si diversifica (agricoltura, allevamento, tessitura, ceramica, metalli, amministrazione) e inizia a interagire con il sapere erudito, il quale inizia a costruirsi in forme ancora lontane dalla nostra idea di "scienza". La figura centrale di questi sviluppi è lo scriba, colui che conosce la scrittura e il calcolo (rappresentazione dei numeri, operazioni aritmetiche, risoluzione di problemi), grazie a un impegnativo addestramento in apposite scuole; egli è ragioniere e amministratore, geometra e architetto, ma anche indovino e mago. Non vi sono chiare delimitazioni fra il sapere pratico-operativo, la sapienza religiosa e la scienza (astronomia, medicina). Ecco come lo storico del Vicino Oriente antico Mario Liverani ci descrive una società e una cultura lontane, ma dove vediamo emergere prime forme di complessità organizzativa.

La specializzazione delle competenze, che senza dubbio costituisce un fattore positivo (se non indispensabile) per il progresso dei procedimenti tecnico-operativi e per la riflessione sul loro contesto logico-teorico, è molto avanzata nel Vicino Oriente antico. Sin dalle prime attestazioni scritte (fine del IV millennio) è documentata un'ampia gamma di operatori specializzati. Essi lavorano in parte in proprio, in ambito familiare, e in parte per conto del tempio o del palazzo, che è al tempo stesso datore di lavoro, committente, fornitore delle materie prime. Esistono anche forme miste, con operatori che svolgono parte del loro lavoro in proprio e parte per conto del tempio o del palazzo, oppure settori che comportano sia operatori privati sia operatori inquadrati nei ranghi delle grandi organizzazioni.

Esiste però una specializzazione particolare, quella dello scriba, che è l'unica specializzazione "intellettuale" prevista. Il lavoro dello scriba è il più impegnativo, nel senso che l'addestramento richiede lunghi anni di dura applicazione a causa dei complessi sistemi logosillabici in uso, ed è anche quello maggiormente valutato dal punto di vista della retribuzione e del rango sociale. In un qualunque campo di competenza tecnico-scientifica, dunque, si assiste a una sorta di divaricazione tra sapere tecnico e sapere teorico, che non ha giovato al sorgere di una speculazione propriamente scientifica.

Si consideri, per esempio, il caso della chimica: procedimenti che comportano la conoscenza delle trasformazioni subite da una sostanza quando è fortemente riscaldata o quando è a contatto con altre sostanze sono applicati nella produzione della ceramica e poi del vetro, nella metallurgia, nella preparazione dei profumi e delle droghe, ecc. Per ciascuna di queste applicazioni esistono i tecnici specializzati, che trasmettono all'interno del loro gruppo, di generazione in generazione (di norma di padre in figlio), nozioni ed esperienze; un'esposizione teorica dei principi potrebbe però avvenire soltanto da parte degli scribi, che monopolizzano l'uso della scrittura e che sono potenzialmente interessati a una concettualizzazione non strettamente legata all'attività produttiva e quotidiana.

Questa trasmissione del sapere tecnico all'ambito degli scribi si palesa solo raramente, e piuttosto per tecnologie nuove che non per quelle tradizionali. Per esempio, sempre nel campo della chimica, questa trasmissione si verifica per la produzione del vetro verso la metà del II millennio, con la compilazione di istruzioni scritte; oppure, nel campo della zootecnia, si verifica per l'allevamento del cavallo, nuova tecnica introdotta anch'essa verso la metà del II millennio, mentre non avviene per l'allevamento di altri animali che faceva tempo da tempo ormai remoto delle comuni pratiche e conoscenze. In linea generale, la struttura socio-culturale dell'epoca respinge le competenze tecnico-scientifiche verso un ambito di lavoro manuale, non particolarmente apprezzato, mentre riserva agli scribi una competenza generale ma astratta, di gestione e controllo del lavoro altrui.

Allo scriba sono peraltro riservate alcune competenze specialistiche; non a caso, si tratta proprio di quei settori che assumono una configurazione più vicina a quella di "scienza". Innanzitutto gli scribi, in quanto amministratori, sono gli specialisti del calcolo matematico; in effetti, tutto il settore matematico è fra i più sviluppati e fra i più fertili in sperimentazioni e in esemplificazioni astratte (sotto forme di "problemi"), svincolate dal caso concreto. Inoltre, certi categorie di scribi si specializzano nell'astronomia, altro settore vistosamente avviato verso uno statuto scientifico; sono gli scribi a eseguire le osservazioni celesti, a registrarle per iscritto, a consultare le serie "canoniche" per la decodifica dei fenomeni. Altre categorie, anch'esse rientranti nel sapere scribale, sono specializzate nella consultazione delle serie mantiche, mediche, magiche, e conferiscono a queste tecniche – che per noi sarebbero assai poco scientifiche – uno statuto scientifico secondo i canoni dell'epoca.

Il rapporto tra sapere pratico e riflessione teorica è dunque strettamente collegato al rapporto tra specialisti e scribi, nonché alla posizione sociale e alla funzione di questi ultimi. Il risultato è che certi settori considerati meno prestigiosi sono rimasti tagliati fuori dalla riflessione teorica, mentre questa si è concentrata su settori che proprio per la loro centralità nella "mappa mentale" del sapere cosmologico mesopotamico erano maggiormente esposti al condizionamento da parte di punto di vista teologici, cosmologici e magici.

[...] Alla metà del VIII secolo, sotto il re babilonese Nabu-nasir (il Nabonassar di Beroso) inizia a quanto pare la redazione sia delle *Cronache babilonesi* sia dei *Diari astronomici* che del resto ne costituiscono la base documentaria. La redazione dei *Diari astronomici*, ossia la consapevole operazione di registrare notte dopo notte la posizione delle stelle e il verificarsi di congiunzioni ed eclissi, e di registrare in parallelo prezzi, livello del fiume, eventi storici e vari, va avanzando per secoli e secoli, in una serie di tavolette, l'una aggiungentesi all'altra, che è ancora attivamente aggiornata nel I secolo a.C. Di questa serie restano parti sostanziose, relative soprattutto ai secoli IV-II, che fanno immaginare facilmente come l'opera completa dovesse essere e apparire un impressionante lavoro collettivo di generazioni e generazioni di scribi e di astronomi quotidianamente impegnati nell'accumulare dati, imperturbabili agli eventi del mondo circostante, al fine di dotare di una base documentaria ampia e certa la teoria delle interconnessioni tra segni astrali ed eventi terreni».

[Tratto dall'introduzione di Mario Liverani alla sezione "La scienza nel Vicino Oriente Antico" del volume citato in bibliografia Storia della Scienza, 2000, pp. 203-204 e 210]