Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

GE4 - Geometria Differenziale 1

Tutorato VIII - Livia Corsi e Giorgia Pestrin (27-11-07)

Esercizio 1. Sia Σ una superficie in $\mathbb{R}^3$ e sia $v \in S^1 \subset T_p\Sigma$ un vettore unitario i.e. $v = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$, dove e_1, $e_2 \in T_p\Sigma$ sono le direzioni principali nel punto p. Calcolare gli zeri della seconda forma quadratica:

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,\pi) & \longrightarrow & [-k_2, -k_1] \\ & \theta & \longmapsto & -k_1\cos^2\theta - k_2\sin^2\theta \end{array}$$

che da la curvatura normale per ogni vettore $v \in T_p\Sigma$. Gli zeri di f sono detti *direzioni asintotiche*. Dimostrare inoltre che si hanno:
(1.1) Zero direzioni asintotiche se e solo se il punto p è ellittico.
(1.2) Una direzione asintotica se e solo se il punto è parabolico
(1.3) Due direzioni asintotiche se e solo se il punto è iperbolico
(1.4) Tre direzioni asintotiche se e solo se infinite direzioni asintotiche se e solo se il punto è planare

Esercizio 2. Determinare i punti critici della funzione “altezza dal piano orizzontale $\{z = 0\}$” sulle seguenti superfici e discuterne la natura
(2.1) La “Sella di scimmia” data dalla carta locale

$$\begin{array}{rccc} X: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u, v, u^3 - 3v^2u) \end{array}$$

(2.2) La “Sella” data dalla carta locale

$$\begin{array}{rccc} X: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u, v, uv) \end{array}$$

(2.3) La superficie Σ data dalla carta locale

$$\begin{array}{rccc} X: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u, v, v^4 - v^2(e^{2u} + e^{-2u})) \end{array}$$

(2.4) La superficie Σ data dalla carta locale

$$\begin{array}{rccc} X: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u, v, v^4 - 4v^2 + 4u^2 - u^4) \end{array}$$

(2.5) Il toro $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - 3)^2 = 1,\ z \geq 0\}$