Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008
GE4 - Geometria Differenziale 1

Tutorato VII - Livia Corsi e Giorgia Pestrin (20-11-07)

Esercizio 1. Si possono definire il determinante e la traccia di un endomorfismo lineare? Giustificare attentamente.

Definizione. Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $p \in \Sigma$; sia $K(p) = k_1(p)k_2(p)$ la curvatura di Gauss di Σ in p, con $k_1(p),\ k_2(p)$ curvature principali, e sia $H(p) = k_1(p) + k_2(p)$ la curvatura media. Diremo che p è

- ellittico se $K(p) > 0$
- iperbolico se $K(p) < 0$
- parabolico se $K(p) = 0$ e $H(p) \neq 0$
- planare se $K(p) = H(p) = 0$
- ombelicale se $k_1(p) = k_2(p)$

Esercizio 2. Calcolare l'operatore forma e discutere la natura dei punti delle seguenti superfici regolari.
(2.1) La sefera $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
(2.2) L'iperboloide iperbolico a una falda $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$
(2.3) Il paraboloide ellittico $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z\}$
(2.4) La sella $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$
(2.5) L'iperboloide ellittico a due falde $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$
(2.6) Il toro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 = 1\}$

Esercizio 3. Nel semipiano $\{(0, y, z) : y > 0\}$ sia data la curva regolare

$$\gamma(v) = (\varphi(v), \psi(v))$$

Utilizzando le formule a pagina 161 (esempio 4) del Do Carmo, discutere il segno della curvatura di Gauss della superficie Σ ottenuta facendo ruotare la curva γ intorno all'asse z. Dare un'interpretazione geometrica del segno della curvatura di Gauss in relazione con la curvatura con segno della curva γ.