Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

GE4 - Geometria Differenziale 1

Tutorato V - Livia Corsi e Giorgia Pestrin (30-10-07)

Esercizio 1. Sia $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2=1\}$ la sfera unitaria e sia $A : s^2 \to S^2$ l'applicazione antipodale, ovver $A(x,y,z) = (-x,-y,-z)$. Mostrare che A è un diffeomorfismo.

Esercizio 2. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $d : S \to \mathbb{R}$ definita da $d(p) = \|p - p_0\|$, dove $p \in S$, $p_0 \in \mathbb{R}^3 \backslash S$, cioè d è la distanza di p da un punto fissato p_0 non in S. Mostrare che d è differenziabile.

Esercizio 3. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e $\pi : S \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione che associa ad ogni $p \in S$ la sua proiezione ortogonale sul piano orizzontale $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 0\}$. Stabilire se π è differenziabile. Per quali punti il differenziale $d\pi_p$ è un isomorfismo lineare?

Esercizio 4. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$S_a := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 = a + z^2\}$$

è una superficie regolare? Giustificare attentamente la risposta e disegnare S_a per almeno un valore del parametro a.

Esercizio 5. Per ogni coppia di numeri reali $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ fissati, sia

$$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

l'elica che al variare di $t \in \mathbb{R}$ si avvolge sul cilindro circolare retto in $\mathbb{R}^3$ di equazione $x^2+y^2=a$.
(5.1) Calcolare curvatura e torsione della curva $\gamma(t) \subset \mathbb{R}^3$ e osservare che non dipendono da t.
(5.2) Dimostrare che una curva in $\mathbb{R}^3$ ha curvatura e torsione costanti se e solo se è contenuta in una retta, in un cerchio o in un'elica cilindrica.

Esercizio 6. Quali delle seguenti applicazioni $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sono carta locale (parametrizzazione) di una superficie regolare? Giustificare attentamente.
(6.1) $X(u,v) = (u, uv, v)$
(6.2) $X(u,v) = (u^2, u^3, v)$
(6.3) $X(u,v) = (u, u^2, v+v^3)$

Esercizio 7. (Do Carmo, p.65 es.4) Sia $f(x,y,z) = z^2$. Mostrare che 0 non è un valore regolare di f ma $f^{-1}(0)$ è una superficie regolare.

Esercizio 8. (Do Carmo, p.66 es.7) Sia $f(x,y,z) = (x+y+z-1)^2$.
(8.1) Trovare punti critici e valori critici di f.
(8.2) Per quali valori di c l'insieme $S_c := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, f(x,y,z) = c\}$ è una superficie regolare?
(8.3) Rispondere ai punti precedenti per la funzione $f(x,y,z) = xyz^2$

Esercizio 9. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione liscia e supponiamo che $1 \in \mathbb{R}$ sia un valore regolare cosicché $\Sigma := \{p \in \mathbb{R}^3 \,:\, f(p) = 1\}$ è una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$.
(9.1) Mostrare che per ogni curva $\alpha : I \to \Sigma$ si ha che $f \circ \alpha : I \to \mathbb{R}$ è la funzione costante $f(\alpha(t)) = 1$ e quindi la sua derivata è nulla.
(9.2) Dedurre che per ogni punto $p \in \Sigma$ il piano tangente $T_p\Sigma$ coincide (a meno di una traslazione) con il piano $Ker\{df_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\}$, dove df_p è la derivata di f in $p \in \mathbb{R}^3$
(9.3) Usare il punto precedente per dimostrare che il piano tangente alla sfera S nel polo sud $s = (0,0,-1)$ ha equazione $z = -1$
(9.4) Sia ora f la funzione liscia definita da $f(p) := \|p\|^2 =< p, p >$, ovvero $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Mostrare che $1 \in \mathbb{R}$ è un valore regolare di f e che il piano tangente T_pS è il piano di $\mathbb{R}^3$ ortogonale al vettore posizione di $p \in \mathbb{R}^3$.