# Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

# GE4 - Geometria Differenziale 1

Tutorato II - Livia Corsi e Giorgia Pestrin (02-10-07)

Esercizio 1. Sia $k$ il vettore $(0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ e sia $\alpha(t) : I \to \mathbb{R}^3$ una curva (diversa da un punto). Dimostrare che $\alpha(t)$ è contenuta in un piano affine orizzontale $\pi$ (cioè $z = z_0$) se e solo se il prodotto scalare $\alpha \cdot k$ è costante (cioè non dipende da $t$).

Esercizio 2. Dire quali tra le seguenti basi sono positivamente orientate:
(2.1) la base $\{(1,3),(4,2)\}$ in $\mathbb{R}^2$.
(2.2) la base $\{(1,3,5),(2,3,7),(4,8,3)\}$ in $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Nello spazio Euclideo $\mathbb{R}^3$ con base ortonormale $\{i,j,k\}$ il prodotto vettoriale $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è definito estendendo per bilinearità le seguenti relazione "quaternioniche":

$$i \wedge i = j \wedge j = k \wedge k = 0$$

$$i \wedge j = -j \wedge i = k, \qquad j \wedge k = -k \wedge j = i, \qquad k \wedge i = -i \wedge k = j$$

Il *prodotto misto* $(u \wedge v) \cdot w$ di tre vettori $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ è il numero reale che si ottiene facendo il prodotto scalare del terzo con il prodotto vettoriale dei primi due. Mostrare che
(3.1) $(u \wedge v) \cdot w$ è uguale al determinante della matrice $3 \times 3$ delle coordinate dei tre vettori $u, v, w$.
(3.2) $(u \wedge v) \cdot w$ è uguale al volume con segno del parallelepipedo generato dai tre vettori $u, v, w$. Fornire un'interpretazione geometrica di questo segno.

Esercizio 4.Dimostrare che il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ non è associativo.

Esercizio 5. Dimostrare che per il prodotto vettoriale vale la regola di Leibniz:

$$\frac{d}{dt}(u(t) \wedge w(t)) = \dot{u}(t) \wedge w(t) + u(t) \wedge \dot{w}(t)$$

Esercizio 6. Determinare l'ascissa curvilinea delle seguenti curve:
(6.1) L'elica cilindrica di raggio $a$ e passo $b$.
(6.2) La cardioide i.e. la curva parametrizzata $\mathcal{C} = \{(\cos t(1-\cos t), \sin t(1-\cos t)) \in \mathbb{R}^2 \; : \; t \in (0, 2\pi)\}$

Esercizio 7. (Do Carmo, p.23 es.6) Una *traslazione* di vettore $v \in \mathbb{R}^3$ è un'applicazione $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $A(p) = p + v$, $p \in \mathbb{R}^3$. Un'applicazione lineare $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ si dice *trasformazione ortogonale* se $\rho u \cdot \rho v = u \cdot v$ per ogni coppia di vettori $u, v \in \mathbb{R}^3$. Un *movimento rigido* in $\mathbb{R}^3$ è la composizione di una traslazione con una trasformazione ortogonale con determinante positivo (quest'ultima condizione è inclusa perché ci aspettiamo che i movimenti rigidi preservino l'orientazione).
(7.1) Dimostrare che la norma di un vettore e l'angolo $\theta$ tra due vettori, $0 \leq \theta \leq \pi$ sono invarianti sotto l'azione di una trasformazione ortogonale con determinante positivo.
(7.2) Mostrare che il prodotto vettoriale è invariante sotto l'azione di una trasformazione ortogonale con determinante positivo. Dire se l'affermazione rimane vera rimuovendo la condizione sul determinante.
(7.3) Mostrare che l'ascissa curvilinea, la curvatura e la torsione di una curva parametriazzata sono (qualora siano definite) invarianti per movimenti rigidi.