GE4 - Geometria Differenziale
Dip. Matematica - Università Roma Tre

Tut. L. Corsi e G. Pestrin

Simulazione di Compito - 19 dicembre 2007
PARTE II

Istruzioni. Scrivere nome, cognome, numero di matricola e firma su ogni foglio che si intende consegnare. Scrivere solamente sui fogli forniti. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici. **NON PARLARE** pena il ritiro del compito.

Punteggio totale 100 punti.

Il Nastro di Möbius Σ è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ dato dall'immagine $Im(\overline{x})$ della seguente applicazione

$$\begin{array}{rccc} \overline{x}: & [-\pi,\pi]\times(-1,1) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & X(u,v) \end{array}$$

dove

$$\overline{x}(u,v) = \left(\cos u\left(2+v\cos\frac{u}{2}\right), \sin u\left(2+v\cos\frac{u}{2}\right), v\sin\frac{u}{2}\right)$$

Dando per scontato che Σ è una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$
con coordinate locali $(u,v)\in(-\pi,\pi)\times(-1,1)$
rispondere alle seguenti domande <u>giusticando le risposte</u>.

Girare, prego →

1. **(10 punti).** Dimostrare che Σ è NON-orientabile.

2. **(10 punti).** Esiste un aperto $U \subset \mathbb{R}^3$ e una funzione liscia $F : U \to \mathbb{R}$ tale che $\Sigma = F^{-1}(a)$ per un qualche valore regolare $a \in \mathbb{R}$ di F?

3. **(10 punti).** È possibile definire il valore della curvatura di Gauss K di una superficie non-orientabile?

4. **(10 punti).** Usare un argometo geometrico - senza calcolare K - per dimostare che Σ non ha punti ellittici.

5. **(10 punti).** Dimostrare che $\overline{x}$ è una parametrizzazione ortogonale, cioè $F = 0$. Inoltre si ha anche $G = 1$.

6. **(10 punti).** $\overline{x}$ conserva gli angoli?

7. **(10 punti).** Per il risultato dell'esecizio # 1 p.237 in una parametrizzazione ortogonale la curvatura di Gauss è data dalla formula

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}$$

   Usare questo risultato per fornire una dimostrazione del Theorema Egregium di Gauss.

8. **(10 punti).** Usare la formula sopra per stabilire se esistono punti $p \in \Sigma$ con curvatura nulla: $K(p) = 0$.

9. **(10 punti).** Il nastro di Möbius Σ è localmente isometrico al piano?

10. **(10 punti).** Usare di teorema di Olinde-Rodrigues per dimostrare che $p \in \Sigma$ è un punto di curvatura nulla $K(p) = 0$ se e solo se il vettore $\overline{x}_v$ è una direzione principale nel punto p.