Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

GE4 - Geometria Differenziale 1

TUTORATO X - LIVIA CORSI E GIORGIA PESTRIN (19-12-07)

ESERCIZIO 1. Sia $\mathcal{C}$ il cilindro $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Considerata l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R} \\ & (u, v) & \longmapsto & (e^{iu}, v) \end{array}$$

mostrare che

1. φ è un'isometria locale.
2. φ non è un'isometria globale.
3. Restringendo il dominio di φ all'aperto $U = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$, allora $\varphi_{|U}$ è un'isometria globale sull'immagine.
4. Non esiste una congruenza tra $\mathcal{C}$ e U.

ESERCIZIO 2. Considerato $\mathbb{R}^3$ come spazio vettoriale Euclideo con prodotto scalare standard, mostrare che un'applicazione lineare è conforme se e solo se conserva gli angoli.

ESERCIZIO 3. (Do Carmo, pag. 230 es. 16) Sia $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con

$$U = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < \theta < \pi, \, 0 < \varphi < 2\pi\},$$
$$X(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \, \sin\theta\sin\varphi, \, \cos\theta)$$

una parametrizzazione della sfera unitaria S^2. Sia

$$\ln \mathrm{tg}\frac{\theta}{2} = \mathrm{u}, \qquad \varphi = \mathrm{v}.$$

Mostrare che una parametrizzazione dell'insieme $X(U) = V$ è data da

$$Y(u, v) = (\mathrm{sech\,u}\cos\mathrm{v}, \, \mathrm{sech\,u}\sin\mathrm{v}, \, \mathrm{tgh\,u})$$

e calcolare la prima forma fondamentale in queste nuove coordinate. Osservare quindi che Y^{-1} è un'applicazione conforme che manda meridiani e paralleli di S^2 in rette del piano, detta "Proiezione di Mercatore". Per l'esercizio 2 conserva gli angoli (ma NON le distanze) e quindi può essere usata per tracciare le rotte degli aerei.

ESERCIZIO 4. Sappiamo (cfr. Do Carmo pag 237, es 1) che se X è una carta locale tale che la sua prima forma fondamentale è diagonale, allora si ha

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right).$$

(4.1) Mostrare che non esistono superfici $X(u, v)$ tali che $E = G = 1$, $F = 0$ e $e = 1$, $g = -1$, $f = 0$.
(4.2) Esiste una superficie $X(u, v)$ con $E = 1$, $F = 0$, $G = \cos^2 u$ e $e = \cos^2 u$, $f = 0$, $g = 1$?