Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2007/2008

GE2 - Geometria 2, geometria euclidea e proiettiva

Tutorato IV - Livia Corsi (12-12-07)

<u>Esercizio 1.</u> Sia data una conica euclidea $\Gamma \subset \mathbb{E}^2$ non degenere, a centro, e si consideri la forma quadratica associata alla matrice A_{00}. Dimostrare che:
(1.1) Le rette le cui giaciture sono gli autovettori di A_{00} e passanti per il centro, sono gli assi di simmetria di Γ.
(1.2) Se Γ è un'iperbole, le rette che hanno per giacitura i vettori isotropi di A_{00} e passanti per il centro, sono gli asintoti di Γ.
(1.3) Dare un'interpretazione geometrica di quanto dimostrato ai punti precedenti.

<u>Esercizio 2.</u> Classificare le seguenti coniche affini (risp. euclidee) ed esplicitare le affinità (risp. le isometrie) che le riducono a forma canonica:
(2.1) $x^2 - 2y + 3 = 0$
(2.2) $x^2 + 4y^2 - 4xy + 1 = 0$
(2.3) $\frac{1}{4}x^2 + y^2 - x - 2y + 1 = 0$
(2.4) $x^2 - (y+1)^2 + 4xy - 1 = 0$
(2.5) $2x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 1 = 0$
(2.6) $9x^2 + 4y^2 - 12xy + 6x - 4y + 1 = 0$

<u>Esercizio 3.</u> Sia $\mathcal{C}$ una parabola euclidea reale. Verificare che, se $\mathcal{C}$ è degenere, allora ha infiniti centri di simmetria, mentre se $\mathcal{C}$ è generale, allora non ha alcun centro di simmetria.

<u>Esercizio 4.</u> Sia $\mathbb{E}^2$ un piano euclideo con riferimento cartesiano standard Oe_1e_2. Sia $\mathcal{C}$ una conica euclidea generica di equazione $f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$. Dimostrare che (x_0, y_0) è centro di simmetria per $\mathcal{C}$ se e solo se $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, ovvero le derivate parziali di f calcolate in (x_0, y_0) sono entrambe nulle. Dire se e quanti centri di simmetria esistono se $\mathcal{C}$ è un'iperbole, un'ellisse o una parabola.