

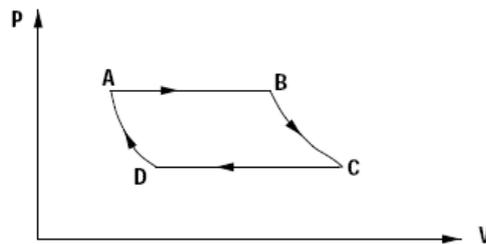
2. Una macchina termica avente come fluido termodinamico una mole di gas perfetto biatomico, esegue il seguente ciclo:

- (1) Isobara reversibile dallo stato A avente  $P=3 \text{ atm}$  e  $V=8 \text{ l}$  allo stato B avente  $V=16 \text{ l}$ .
- (2) Espansione adiabatica reversibile fino ad uno stato C.
- (3) Compressione isobara reversibile fino ad uno stato D.
- (4) Compressione adiabatica reversibile fino a tornare allo stato di partenza.

Sapendo che il rendimento della macchina è  $\eta = 0.183$ :

- a) Disegnare il ciclo nel piano PV.
- b) Trovare il lavoro compiuto nel ciclo.
- c) Trovare il calore scambiato in ognuna delle 4 trasformazioni.

Il ciclo termodinamico eseguito dalla macchina termica è il seguente:



Il rendimento di una macchina termica è definito come:

$$\eta = \frac{L}{Q_a} \quad \text{dove } Q_a \text{ è il calore assorbito nel ciclo.}$$

Nel nostro caso il calore viene assorbito solo nel tratto AB (espansione isobara reversibile).

$$Q_a = Q_{AB} = n \cdot C_P \cdot (T_B - T_A)$$

$$T_A = \frac{P_A \cdot V_A}{n \cdot R} = \frac{3 \cdot 8 \cdot 101}{1 \cdot 8.314} = 291.6 \text{ K}$$

$$T_B = \frac{P_B \cdot V_B}{n \cdot R} = \frac{3 \cdot 16 \cdot 101}{1 \cdot 8.314} = 583.1 \text{ K}$$

$$C_P = \frac{7}{2}R \quad (\text{Gas perfetto biatomico})$$

$$Q_a = n \cdot C_P \cdot (T_B - T_A) = 1 \cdot \frac{7}{2} \cdot 8.314 (583.1 - 291.6) = 8482.3 \text{ J}$$

Possiamo ora ricavare il lavoro prodotto nel ciclo dalla macchina:

$$L = Q_a \cdot \eta = 8482.3 \cdot 0.183 = 1553.8 \text{ J}$$

Determiniamo ora il calore scambiato dal gas nelle quattro trasformazioni. Nel tratto AB lo abbiamo già trovato, nelle due adiabatiche il calore scambiato è zero, mentre per calcolare il calore scambiato nella compressione isobara CD utilizziamo il primo principio della termodinamica. Dato che  $\Delta U = 0$  in un ciclo, si ha che:

$$Q_{AB} + Q_{CD} = L$$

$$\Rightarrow Q_{CD} = L - Q_{AB} = 1553.8 - 8482.3 = -6928.5 \text{ J}$$

2. Due moli di un gas monoatomico, approssimabili ad un gas perfetto, che si trovano inizialmente alla pressione di 3 atm e occupano il volume di 16 l, compiono una trasformazione isobara reversibile, assorbendo 1200 J di calore. Calcolare :

- la temperatura finale del gas;
- la variazione di energia interna del gas;
- il lavoro fatto o subito dal gas nella trasformazione;
- la variazione di entropia del gas;

\*\*\*

### Esercizio 2.

$$c_v = \frac{3}{2}R = 12.465 \text{ J/(K mole)}; \quad c_p = \frac{5}{2}R = 20.775 \text{ J/(K mole)};$$

$$\text{a) } T_i = \frac{p_i V_i}{nR} = \frac{3 \cdot 1.01 \cdot 10^5 \cdot 16 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8.31} = 291.7 \text{ K};$$

$$Q = nc_p \Delta T \rightarrow T_f = T_i + \frac{Q}{nc_p} = 320.6 \text{ K};$$

$$\text{b) } \Delta U = nc_v \Delta T = 720 \text{ J};$$

$$\text{c) } L = Q - \Delta U = 480 \text{ J};$$

$$\text{d) } \Delta S = nc_p \ln \frac{T_f}{T_i} = 3.925 \text{ J/K}.$$

2)  $n=2$  moli di gas monoatomico compiono un ciclo reversibile così fatto:

A-B: espansione isoterma da  $p_A = 2 \text{ atm}$ ,  $V_A = 1 \text{ l}$  a  $V_B = 2 \text{ l}$ ;

B-C: espansione adiabatica fino a  $V_C = 3.03 \text{ l}$ ;

C-D: compressione isobara fino al volume  $V_D = V_A$ ;

D-A: trasformazione isocora fino allo stato A.

a) Disegnare il ciclo sul piano p-V e calcolare la temperatura nei punti A, B, C e D;

b) calcolare la variazione di energia interna lungo la trasformazione A-C;

c) Facoltativo: calcolare la variazione di entropia lungo la trasformazione A-C.

[N.B.  $R=8.31 \text{ J/mole K}$ ]

a) Il ciclo termodinamico, rappresentato in figura, è percorso in senso orario e le coordinate (P,V,T) valgono:

stato A:

$$p_A = 2 \text{ atm}, V_A = 1 \text{ l} = 10^{-3} \text{ m}^3 \quad T_A = p_A V_A / nR \sim 12 \text{ K}$$

stato B:

$$T_B = T_A = p_A V_A / nR \sim 12 \text{ K}$$

$$V_B = 2V_A = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$p_B = nRT_B / V_B$$

$$= nR p_A V_A / (nR) 1 / (2V_A) = p_A / 2 = 1 \text{ atm}$$

stato C:

$$V_C = 3.03 \text{ l} = 3.03 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

Essendo la trasformazione B-C adiabatica (con  $\gamma = 5/3$ ):

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$$

$$T_C = T_B \left( \frac{V_B}{V_C} \right)^{\gamma-1} = 12 \text{ K} \left( \frac{2 \times 10^{-3}}{3.03 \times 10^{-3}} \right)^{\frac{2}{3}} \approx 9.1 \text{ K}$$

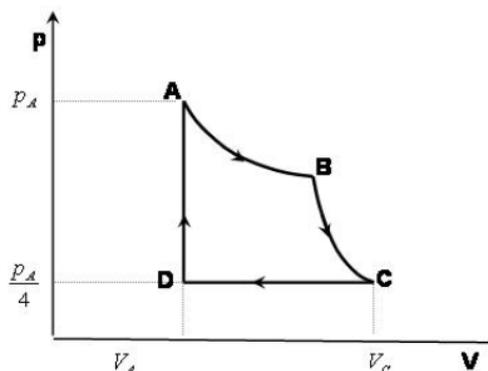
$$p_C = nRT_C / V_C = \frac{2 \times 8.31 \text{ J/mole K} \times 9.1 \text{ K}}{3.03 \times 10^{-3} \text{ m}^3} \approx 0.5 \text{ atm} = \frac{p_A}{4}$$

stato D:

$$p_D = p_C = p_A / 4 = 0.5 \text{ atm}$$

$$V_D = V_A = 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$T_D = p_D V_D / nR = p_A / 4 V_A / nR = T_A / 4 \sim 3 \text{ K}$$



b) La variazione di energia interna lungo la trasformazione A-C è data dalla sola variazione di energia interna lungo la trasformazione adiabatica, ossia:

$$\Delta E_{AC} = \Delta E_{AB} + \Delta E_{BC}$$

$$= \Delta E_{BC}$$

$$= n c_V (T_C - T_B)$$

$$= n \times \frac{3}{2} R \left( \frac{p_C V_C}{nR} - \frac{p_B V_B}{nR} \right) = \frac{3}{2} \times (0.5 \times 3.03 - 1 \times 2) 10^5 \times 10^{-3} \text{ J} \approx -73 \text{ J}$$

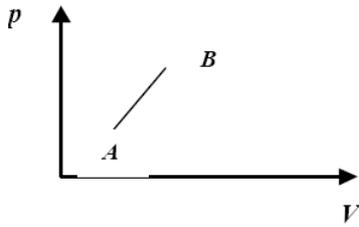
c) La variazione di entropia lungo la trasformazione A-C è data da:

$$\Delta S = \int_A^C \frac{dQ}{T} = \int_A^B \frac{dQ}{T} + \int_B^C \frac{dQ}{T}$$

Essendo la trasformazione B-C adiabatica ( $Q=0$ ), la variazione di entropia è pari alla variazione di entropia dovuta alla sola trasformazione isoterma A-B, ossia:

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_A^B \frac{dW}{T} = \int_A^B \frac{pdV}{T} = \int_A^B \frac{nRTdV}{VT} = nR \ln \frac{V_B}{V_A} = nR \ln 2 = 11.5 \text{ J/K}$$

- 4) Un gas perfetto monoatomico subisce la trasformazione descritta dall'equazione  $p = k V$ ,  $p$  è la pressione,  $V$  il volume e  $k$  una costante positiva. Lo stato iniziale è il punto A in cui  $p_A = 4 \text{ atm}$ ,  $V_A = 8.21 \text{ litri}$  e  $T_A = 200 \text{ K}$ . Lo stato finale è il punto B dove  $V_B = 2 V_A$ .
- Disegnare in un diagramma ( $p, V$ ) la trasformazione AB e calcolare la corrispondente variazione di energia interna del gas.
  - Calcolare il lavoro compiuto dal gas durante la trasformazione AB.



Nella trasformazione AB  $p = k V$ , pertanto se  $V_B = 2 V_A$ ,  $p_B = k V_B = k 2 V_A = 2 p_A$ .  
 Inoltre  $T_A = p_A V_A / nR$ ,  $T_B = p_B V_B / nR = 4 p_A V_A / nR = 4 T_A = 800 \text{ K}$ .

La variazione di energia interna

$$\Delta E = n c_V \Delta T = n \left( \frac{3}{2} \right) R (4 T_A - T_A) = n \left( \frac{9}{2} \right) R T_A = \left( \frac{9}{2} \right) p_A V_A$$

$$= 4.5 \cdot 4 \cdot 8.21 = 147.8 \text{ litri atm} = 147.8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 1.01 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 14926 \text{ J}$$

- b) Il lavoro compiuto dal gas è pari all'area delimitata dalla trasformazione tra il punto A e il punto B, quindi :

$$L = (V_B - V_A) (p_B + p_A) / 2 = 3 V_A p_A / 2 = 1.5 p_A V_A = 49.26 \text{ litri atm} = 4975.3 \text{ J}$$

2) 2 moli di gas perfetto biatomico compiono il seguente ciclo termodinamico:

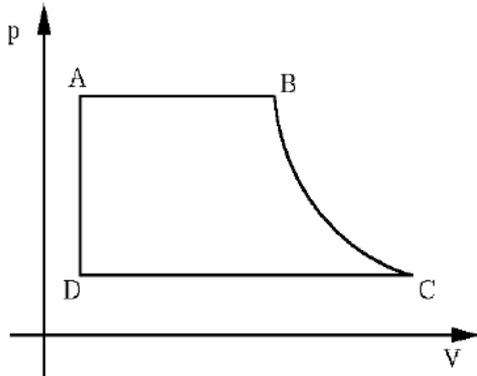
AB espansione isobara, BC espansione isoterma,

CD compressione isobara, DA compressione isocora.

Si conoscono  $V_A = 50 \text{ dm}^3$ ,  $p_A = 2 \text{ atm}$ ,  $V_B = 3 V_A$ ,  $V_C = 5 V_A$ .

a) Disegnare il ciclo sul piano p-V e calcolare le coordinate termodinamiche (p,V,T) nei punti A, B, C e D:

b) Calcolare il calore scambiato ed il lavoro fatto dal gas nelle quattro trasformazioni:



Il ciclo termodinamico, rappresentato in figura, è percorso in senso orario e le coordinate (P,V,T) valgono:

stato A:

$$p_A = 2 \text{ atm}, V_A = 50 \text{ dm}^3 = 0.05 \text{ m}^3, T_A = p_A V_A / nR \sim 610 \text{ K}$$

stato B:

$$p_B = p_A = 2 \text{ atm}, V_B = 3 V_A = 150 \text{ dm}^3 = 0.15 \text{ m}^3,$$

$$T_B = p_B V_B / nR \sim 1829 \text{ K}$$

stato C:

essendo C sulla isoterma di B di ha  $p_B V_B = p_C V_C$ , da cui

$$p_C = p_B V_B / V_C = p_A 3 V_A / 5 V_A = 3/5 p_A = 1.2 \text{ atm}$$

$$T_C = T_B \sim 1829 \text{ K}$$

stato D:

$$p_D = p_C = 3/5 p_A = 1.2 \text{ atm}$$

$$V_D = V_A = 0.05 \text{ m}^3$$

$$T_D = p_D V_D / nR \sim 366 \text{ K}$$

La quantità  $P_A V_A$  vale  $100 \text{ l atm}$  ovvero  $1.013 \cdot 10^4 \text{ J}$ . Abbiamo dunque:

Isobara AB

$$Q_{AB} = n C_p \Delta T = 7/2 P_A (V_B - V_A) = 7 P_A V_A \cong 7.09 \cdot 10^4 \text{ J}$$

$$W_{AB} = P_A (V_B - V_A) \cong 2.026 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

Isoterma BC

$$Q_{BC} = n R T_B \ln V_C / V_B = P_B V_B \ln 5/3 = 3 P_A V_A \ln 5/3 \cong 1.55 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

$$W_{BC} = Q_{BC}$$

Isobara CD

$$Q_{CD} = n C_p \Delta T = 7/2 n R \Delta T = 7/2 P_C (V_D - V_C) = -42/5 P_A V_A \cong -8.51 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

$$W_{CD} = P_C (V_D - V_C) = -12/5 P_A V_A \cong -2.43 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

Isocora DA

$$Q_{DA} = n C_v \Delta T = 5/2 n R \Delta T = 5/2 (P_A V_A - P_D V_D) = P_A V_A \cong 1.013 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

$$W_{DA} = 0$$

Calori e lavoro totali per il ciclo

$$Q_{\text{Tot}} = P_A V_A (7 + 3 \ln 5/3 - 42/5 + 1) = P_A V_A (3 \ln 5/3 - 2/5) \cong 1.15 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

$$W_{\text{Tot}} = P_A V_A (2 + 3 \ln 5/3 - 12/5) = P_A V_A (3 \ln 5/3 - 2/5) \cong 1.15 \cdot 10^4 \text{ J}$$

$$\Delta U = Q_{\text{Tot}} - W_{\text{Tot}} = 0$$

- 3) Due moli di un gas perfetto monoatomico compiono, a partire dallo stato iniziale A di coordinate termodinamiche ( $p_A = 2 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ,  $V_A = 10 \text{ dm}^3$ ), il ciclo reversibile ABCA, in cui AB è una trasformazione in cui la pressione decresce linearmente all'aumentare del volume, con  $p_B = (1/2) p_A$  e  $V_B = 4V_A$  ed inoltre BC è una compressione isobara e CA è una compressione isoterma.
- a) Si disegni l'intero ciclo in un diagramma (V, p). Si calcolino le coordinate termodinamiche di C e la variazione di energia interna relativa alla trasformazione AB.
- b) Si calcoli la quantità di calore scambiata durante l'intero ciclo.

[Nota:  $R = 8.31 \text{ J/Kmole} = 0.082 \text{ l atmo /Kmole}$ ]

- a) Le variabili termodinamiche (p,V,T) per lo stato C possono essere ricavate applicando l'equazione di stato dei gas perfetti

$$pV = nRT$$

sapendo che:

$$p_A = 2 \times 10^5 \text{ N/m}^2, V_A = 10^{-2} \text{ m}^3;$$

$$p_B = 10^5 \text{ N/m}^2, V_B = 4 \times 10^{-2} \text{ m}^3;$$

$$p_C = p_B = 10^5 \text{ N/m}^2 \text{ (essendo BC isobara)}$$

$$p_C V_C = p_A V_A \text{ (essendo AC isoterma)}, \text{ da cui}$$

$$V_C = p_A V_A / p_C = 2 \times 10^{-2} \text{ m}^3$$

Inoltre:

$$T_A = T_C = p_A V_A / nR = (2 \times 10^5 \text{ N/m}^2) (10^{-2} \text{ m}^3) / (2 \text{ moli} \times 8.31 \text{ J/K mole}) = 120.3 \text{ K}$$

La variazione di energia interna  $\Delta U$  nella trasformazione AB è :

$$\Delta U = n c_V \Delta T = n c_V (T_B - T_A) = n (3R/2) (p_B V_B - p_A V_A) / nR = 3000 \text{ J}$$

- b) La quantità di calore scambiata nell'intero ciclo  $Q_{\text{ciclo}}$  è:

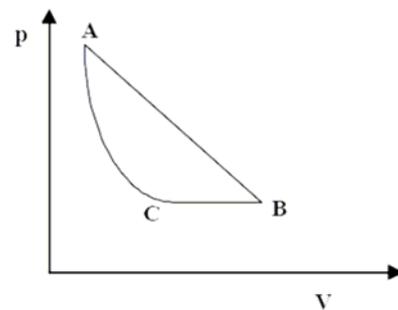
$$Q_{\text{ciclo}} = L_{\text{ciclo}} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA}$$

$$L_{AB} = (p_A + p_B) (V_B - V_A) / 2 = 4500 \text{ J}$$

$$L_{BC} = p_B (V_C - V_B) = -2000 \text{ J}$$

$$L_{CA} = \int p dV = nRT_A \ln (V_A / V_C) = -1386 \text{ J}$$

$$Q_{\text{ciclo}} = 1114 \text{ J}$$



**Esercizio 2:** Due di moli di gas perfetto *biatomico*, inizialmente a pressione  $p_A = 10^5 \text{ N/m}^2$  e volume  $V_A = 5 \text{ l}$ , compie un ciclo termodinamico così composto: (AB): isobara fino a raddoppiare il volume iniziale; (BC): isocora fino a dimezzare la pressione; (CD): isobara fino al volume iniziale; (DA) isocora fino alla pressione iniziale. Svolgere i seguenti punti:

- a) Calcolare pressioni e volumi nei punti B, C e D e il lavoro complessivo compiuto dal gas. Individuare il punto del ciclo a temperatura massima e determinarla.
- b) Calcolare le quantità di calore scambiate nelle varie trasformazioni, specificandone il segno.
- c) Facoltativo: svolgere il punto b) senza utilizzare il numero di moli.

a) Abbiamo  $p_B = p_A$ ,  $V_B = 2V_A$ ,  $p_C = \frac{1}{2}p_A$ ,  $V_C = V_B = 2V_A$ ,  $p_D = p_C = \frac{1}{2}p_A$ ,  $V_D = V_A$ . Il lavoro corrisponde all'area sottesa dal ciclo, ovvero  $L = (p_A - p_C)(V_B - V_A) = 250 \text{ J}$ . Usando la legge dei gas perfetti  $PV = nRT$  abbiamo che il punto ha temperatura maggiore corrisponde al punto del ciclo con pressione e volume massimi ovvero il punto B per cui si ha  $T_B = p_B V_B / (nR) \simeq 60.2 \text{ K}$ .

b) La trasformazione AB si svolge a pressione costante, per cui  $Q_{AB} = nC_p \Delta T = \frac{7}{2}(nRT_B - nRT_A) = \frac{7}{2}P_A(V_B - V_A) = 1750 \text{ J}$ . La trasformazione BC si svolge a volume costante, per cui  $Q_{BC} = nC_v \Delta T = \frac{5}{2}(nRT_C - nRT_B) = \frac{5}{2}V_B(p_C - p_A) = -1250 \text{ J}$ . Inoltre  $Q_{CD} = -Q_{AB}/2$  e  $Q_{DA} = -Q_{BC}/2$ .

3) Un gas perfetto monoatomico costituito da  $n=2$  moli compie la seguente trasformazione ciclica:

- A → B: espansione isobara a pressione  $p_A = 3 \text{ atm}$  da  $V_A = 1 \text{ litro}$  a  $V_B = 2 \text{ litri}$ ;
- B → C: trasformazione isocora da  $p_B$  a  $p_C = 1 \text{ atm}$ ;
- C → D: compressione isoterma da  $V_B$  a  $V_D = 1 \text{ litro}$ ;
- D → A: trasformazione isocora da  $p_D$  a  $p_A = 3 \text{ atm}$ .

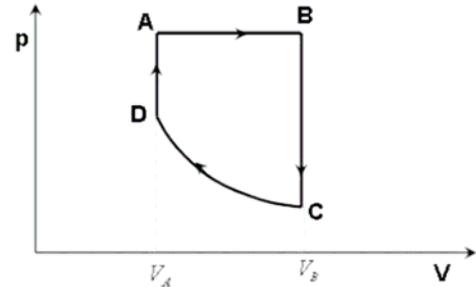
Si svolgano i seguenti punti:

- a) si disegni nel piano pV la trasformazione ciclica, si determinino per gli stati A, B, C e D le variabili termodinamiche (P,V,T) e si calcoli il lavoro W svolto dal gas;
- b) si determinino per i quattro rami della trasformazione e per l'intero ciclo la variazione  $\Delta E_{\text{int}}$  di energia interna, il lavoro W svolto dal gas ed il calore Q scambiato.

[Nota:  $R = 8.31 \text{ J/Kmole} = 0.0821 \text{ l atm /Kmole}$ ]

a) La trasformazione compiuta dal gas è il ciclo rappresentato in figura.

Per ogni stato le variabili termodinamiche (p,V,T) si possono determinare utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti:



stato A:

$$p_A = 3 \text{ atm}, \quad V_A = 1 \text{ litro} = 10^{-3} \text{ m}^3, \quad T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{3 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \times 10^{-3} \text{ m}^3}{2 \times 8.31 \text{ J/Kmole}} = 18 \text{ K}$$

stato B:

$$p_B = p_A = 3 \text{ atm}, \quad V_B = 2 \text{ litri} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3, \quad T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{3 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \times 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3}{2 \times 8.31 \text{ J/Kmole}} = 36 \text{ K}$$

stato C:

$$p_C = 1 \text{ atm}, \quad V_C = V_B = 2 \text{ litri} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3, \quad T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \frac{1 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \times 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3}{2 \times 8.31 \text{ J/Kmole}} = 12 \text{ K}$$

stato D:

$$T_D = T_C = 12 \text{ K}, \quad V_D = V_A = 1 \text{ litro} = 10^{-3} \text{ m}^3, \quad p_D = \frac{nRT_D}{V_D} = \frac{2 \times 8.31 \text{ J/Kmole} \times 12 \text{ K}}{10^{-3} \text{ m}^3} \approx 2 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 2 \text{ atm}$$

Il lavoro svolto dal gas durante l'intero ciclo è pari all'area racchiusa dalla curva nel piano pV:

$$\begin{aligned} W_{\text{TOT}} &= p_A \times (V_B - V_A) - \int_D^C p dV = p_A \times (V_B - V_A) - \int_D^C \frac{nRT_D}{V} dV = p_A \times (V_B - V_A) - nRT_D \ln \frac{V_C}{V_D} \\ &= 3 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \times 10^{-3} \text{ m}^3 - 2 \times 8.31 \text{ J/Kmole} \times 12 \text{ K} \ln 2 = 3 \times 10^2 \text{ J} - 138 \text{ J} \approx 162 \text{ J} \end{aligned}$$

Il lavoro è positivo, infatti il ciclo è percorso in senso orario.