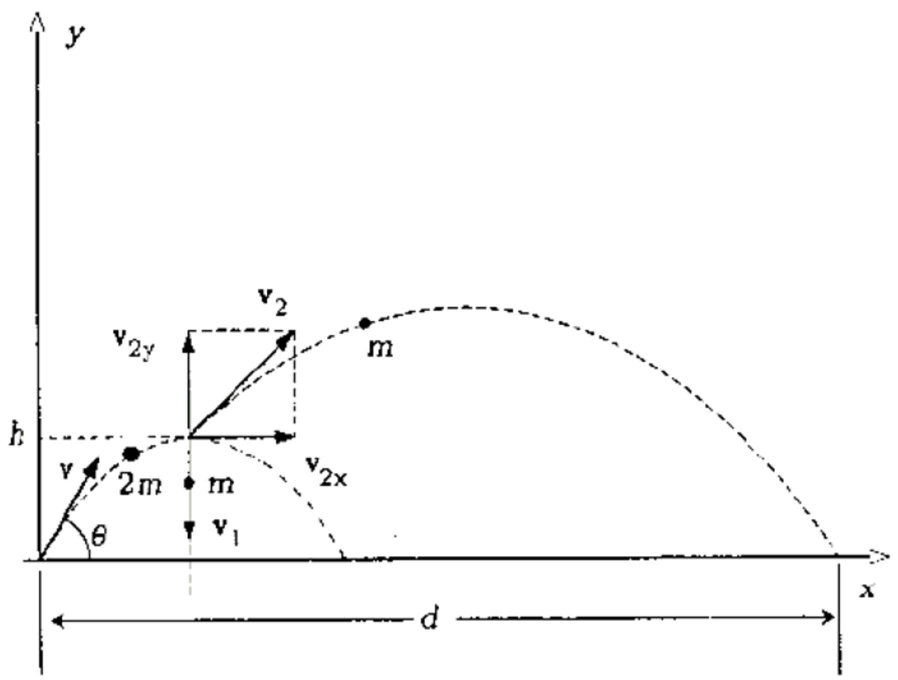
$\overline{\mathbf{5-3}}$ Un proiettile viene sparato da un cannone ad un angolo $\theta = 60°00'$ con l'orizzontale e con velocità iniziale $|\mathbf{v}| = 400,0$ m/s. Raggiunto il punto più alto h della traiettoria, il proiettile esplode dividendosi in due parti uguali di massa m. Se uno dei due frammenti cade verticalmente percorrendo lo spazio h nel tempo $t_1 = 10,00$ s, calcolare a che distanza dal cannone atterra l'altro frammento.

$\boxed{\mathbf{5-3}}$ Il sistema costituito dal proiettile è soggetto soltanto all'azione esterna della forza peso. Pertanto le equazioni del moto del proiettile sono (con riferimento alla figura):



$$x = v\cos\theta\, t \quad , \tag{1}$$

$$y = v\sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2 \quad . \tag{2}$$

Il proiettile raggiunge la quota massima h, dove la sua velocità $\mathbf{v}(h)$ è soltanto orizzontale (cioè $v(h)_y = 0$, $v(h)_x = v\cos\theta = costante$), all'istante τ dato dalla:

$$v(h)_y = 0 = v\sin\theta - g\tau \quad ,$$

cioè:

$$\tau = \frac{v\sin\theta}{g}. \tag{3}$$

Quindi lo spazio $x(\tau)$ percorso dal proiettile lungo l'asse x prima di dividersi in due parti è, per la (1):

$$x(\tau) = v\cos\theta\,\tau = v^2\sin\theta\cos\theta/g. \tag{4}$$

Giunto a quota h il proiettile si spacca in due frammenti uguali. Le forze che provocano la divisione del proiettile sono *tutte forze interne*, cioè forze esercitate da parti del proiettile su altre parti del medesimo. Pertanto queste forze possono variare la quantità di moto di ogni singolo frammento, ma non possono alterare la quantità di moto totale del sistema. Cioè:

quantità di moto totale prima dell'esplosione =
quantità di moto totale dopo l'esplosione

Chiamando $\mathbf{v}_1$ la velocità del frammento che cade lungo la verticale e $\mathbf{v}_2$ quella dell'altro frammento, la relazione precedente si scrive:

$$2m\mathbf{v}(h) = m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2. \tag{5}$$

Proiettando la (5) lungo gli assi x e y ed osservando che $\mathbf{v}(h) = \mathbf{v}(h)_x$ è diretta come x e che $\mathbf{v}_1$ è diretta come $-y$, si ha:

$$v_{2x} = 2v\cos\theta \quad , \quad \text{diretta come } x \quad . \tag{6}$$

$$v_{2y} = v_1 \quad , \quad \text{diretta come } y \quad , \tag{7}$$

Il moto del frammento 1 è uniformemente accelerato con accelerazione $-g$ e velocità iniziale $-v_1$ desumibile dalla relazione:

$$h = v_1 t_1 + \frac{1}{2}g t_1^2 \quad .$$

Il valore di h si ottiene facilmente dalle (2) e (3):

$$h = \frac{1}{2}\frac{v^2\sin^2\theta}{g} = 6.122 \text{ m} \quad .$$

?

Pertanto si ha:

$$v_1 = \frac{2h - g t_1^2}{2t_1} = 563{,}20 \text{ m/s} \quad . \tag{8}$$

Le equazioni del moto del frammento (2) sono:

$$x_2 - x(\tau) = v_{2x}t' = 2v\cos\theta t' \quad , \tag{9}$$

$$y_2 - h = v_{2y}t' - \frac{1}{2}g t'^2 = v_1 t - \frac{1}{2}g t'^2 \quad , \tag{10}$$

(dove $t' = t - \tau$). Il frammento 2 tocca terra all'istante T ricavabile dalla (10) ponendo $y_2 = 0$, cioè:

$$T = \frac{v_1 \pm \sqrt{v_1^2 - 2hg}}{g}$$

Ci sono naturalmente due valori di T per cui $y = 0$ e precisamente:

$$T_1 = \frac{v_1 - \sqrt{v_1^2 - 2hg}}{g} \qquad e \qquad T_2 = \frac{v_1 + \sqrt{v_1^2 - 2hg}}{g}$$

Di questi il minore T_1 è il tempo che il frammento impiegherebbe per raggiungere il suolo se v_1 fosse diretta in verso opposto all'asse y, e infatti $T_1 = t_1$, uguale cioè al tempo che il primo frammento impiega per raggiungere il suolo (confronta T_1 con t_1 deducibile dalla (8)). Quindi il valore di T da noi cercato è T_2. Allora dalla (9) si ha:

$$x_2 - x(\tau) = 2v\cos\theta T_2 \quad ,$$

e quindi la distanza dal cannone a cui il frammento 2 atterra è:

$$d = x_2 = x(\tau) + 2v\cos\theta T_2 =$$

$$= \frac{v^2 \sin\theta\cos\theta}{g} + \frac{2v\cos\theta}{g}(v_1 + \sqrt{v_1^2 - 2gh}) =$$

$$= \frac{16 \cdot 10^4 \cdot 0,866 \cdot 0,5}{9,8} + \frac{2 \cdot 400 \cdot 0,5}{9,8}(563,2 + \sqrt{563,2^2 - 2 \cdot 9,8 \cdot 6,122}) =$$

$$= 48'183 \text{ m} = 48,183 \text{ km} \quad .$$

$\boxed{5-19}$ Un proiettile di massa $m = 10,0$ g è sparato con velocità $v = 300$ m/s contro un blocco di piombo di massa $M = 990$ g sospeso ad una fune inestensibile di lunghezza $l = 100$ cm. Si supponga che l'urto sia completamente anelastico. Calcolare l'angolo massimo θ che la fune forma con la verticale in seguito al rinculo del blocco (trascurando il peso della fune).

5 - 19 Dalla legge di conservazione della quantità di moto:

$$mv = (m + M)V \quad ,$$

si ricava facilmente la velocità del sistema blocco-proiettile dopo l'urto:

$$V = \frac{mv}{m + M} \quad .$$

Dopo l'urto l'energia cinetica di questo sistema si trasforma in energia potenziale gravitazionale:

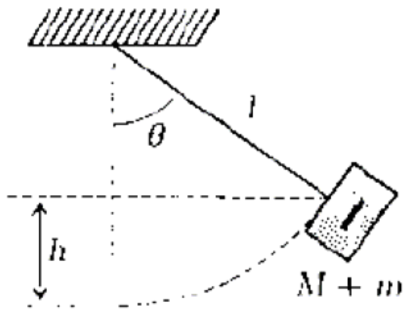
$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gh \quad ,$$

da cui segue:

$$h = \frac{V^2}{2g} = \frac{m^2v^2}{2(m + M)^2 g} = \frac{10^2 \cdot 9 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^6 \cdot 980} = 45,92 \text{ cm} \quad .$$

L'angolo massimo θ richiesto, è quindi dato dalla (vedi figura):

$$\cos\theta = \frac{l - h}{l} = 0,54 \quad ,$$



da cui segue:

$$\theta = 57^\circ 16' \quad .$$