11) Calcolare la velocità periferica di un corpo di massa $m = 0.5\,kg$ che si muove con velocità angolare $\omega = 0.6\,rad/s$ lungo una circonferenza di raggio $r = 1\,m$.
Quanto valgono l'accelerazione e la forza centripeta?

Soluzione:

- **Quanto vale la velocità periferica?**

  La velocità periferica in un moto circolare uniforme è data da

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r$$

  Numericamente:

$$v = \omega r = 0.6\,rad/s \cdot 1\,m = 0.6\,m/s$$

- **Quanto vale l'accelerazione centripeta?**

  L'accelerazione in un moto circolare uniforme è sempre diretta verso il centro e costante in modulo:

$$\vec{a}_c = -\omega^2 \vec{r}$$

  Numericamente quindi:

$$|a_c| = \omega^2 r = (0.6\,rad/s)^2 \cdot 1\,m = 0.36\,m/s^2$$

- **Quanto vale la forza centripeta?**

  La risultante delle forze che agiscono sul corpo è data da:

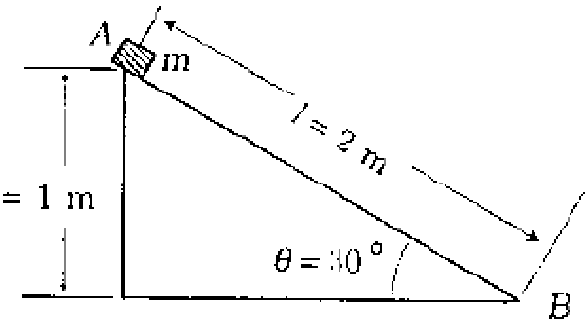
$$\vec{F} = m\vec{a}$$

  Nel caso di un moto circolare uniforme quindi

$$\vec{F} = m\vec{a}_c$$

  è costante in modulo e sempre diretta verso il centro (centripeta) In questo caso quindi

$$|F| = m|a_c| = 0.5\,kg \cdot 0.36\,m/s^2 = 0.18\,N$$



$\boxed{4-2}$ Un corpo di massa m = 102 g scivola dal punto A al punto B lungo un piano inclinato privo di attrito. Si calcoli il lavoro L eseguito dalla forza peso.
[$L = 1,000$ J]

$\boxed{4-2}$ La forza peso è data da:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{g} \quad .$$

In questo caso è comodo scomporla in due componenti, una perpendicolare e l'altra parallela al piano inclinato, di modulo rispettivamente:

$$F_\perp = mg\cos\theta \quad ,$$

$$F_\parallel = mg\sin\theta \quad .$$

La prima componente è equilibrata dalla reazione vincolare del piano inclinato, che è perpendicolare al piano stesso, essendo il contatto piano–oggetto privo di attrito. La seconda componente ha direzione parallela al piano inclinato e quindi allo spostamento. Per il lavoro L si ha dunque:

$$L = F_\parallel l = mg\sin\theta l = 0{,}102 \cdot 9{,}80 \cdot 0{,}5 \cdot 2 = 1{,}000 \ J \quad .$$

Una pallina di massa $150\,g$ viene lasciata cadere da un'altezza di $120\,cm$.

a) Quanto vale la sua velocità un istante prima di toccare terra?

Ad ogni rimbalzo la pallina perde il 20% della sua energia.

b) Quale altezza raggiunge dopo il primo rimbalzo?

c) E dopo il secondo?

Ris.: $v = 4.85\,m/s$; $h' = 0.96\,m$; $h'' = 0.77\,m$

Soluzione:

a) **Quanto vale la sua velocità un istante prima di toccare terra?** Devo calcolare la velocità con cui la pallina cade a terra partendo (con velocità iniziale nulla) da un'altezza h, cioè

$$v_{H=0}$$

La forza che agisce sulla pallina è la forza peso.

- La forza peso è una forza costante $F_p = mg$.
- L'accelerazione di gravità è costante (e uguale per tutti i corpi).
- La forza peso è una forza conservativa la cui energia potenziale è data da $E^{gr}_{pot} = mgh$
- Visto che l'accelerazione di gravità è costante. posso scrivere le equazioni della pallina come quelle di un corpo che si muove di moto uniformemente accelerato (lungo la direzione z)

  La velocità (in funzione del tempo) per un moto uniformemente accelerato è data da:

  $$v(t) = v_o + a(t - t_o)$$

  In questo caso l'accelerazione è $-g$ (diretta verso il basso) e la velocità iniziale è nulla:

  $$v(t) = -g(t - t_o)$$

  Per calcolare la velocità un attimo prima di toccare terra, devo calcolare l'intervallo di tempo $(t_{H=0} - t_{H=h})$ necessario perè la pallina arrivi a terra partendo da una quota h

  In altre parole dobbiamo trovare il valore di $t_{H=0} - t_{H=h}$ tale che

  $$z_(t_{H=0}) = 0$$

  – **Per quale valore di $t_{H=0} - t_{H=h}$ si ha che $z_(t_{H=0}) = 0$?** Visto che si tratta di un moto uniformemente accelerato, l'equazione del moto è data da:

  $$z(t) = z_o + v_o(t - t_o) + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2$$

  quindi

  $$z(t) - z_o = v_o(t - t_o) + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2$$

  in questo caso $z_o = h$ e $z(t_{H=0}) = 0$ quindi si ottiene

  $$h = \frac{1}{2}g(t_{terra} - t_o)^2$$

  da cui si ricava che

  $$t_{H=0} - t_{H=h} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

  Quindi la velocità quando tocca terra vale:

  $$v_{H=0} = -g(t_{H=0} - t_{H=h}) = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$$

- La velocità è legata all'energia cinetica

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2$$

da cui

$$v = \sqrt{\frac{2E_{cin}}{m}}$$

Visto che la massa è nota, calcolare la velocità finale è equivalente a calcolare l'energia cinetica finale

  - **Quanto vale l'energia cinetica poco prima di toccare terra?** Posso considerare il teorema dell'energia cinetica:

    $$\Delta E_{cin} = L$$

    Quindi l'energia cinetica per $H = 0$ è legata all'energia cinetica alla quota $H = h$ dalla relazione:

    $$E_{cin}^{H=0} = L + E_{cin}^{H=h} = L_{h \to 0}$$

    In questo caso l'energia cinetica iniziale è nulla (perchè la pallina parte da ferma) quindi per calcolare l'energia cinetica finale basta calcolare il lavoro compiuto sulla pallina.

    * **Quanto vale il lavoro compiuto sulla pallina?**

      · Il lavoro è definito come:

      $$L_{A \to B} = \int_A^B \vec{F}(x) \cdot d\vec{x}$$

      In questo caso la forza è la forza peso ($F_p = mg$) costante e parallela allo spostamento della pallina, quindi

      $$L_{h \to 0} = \vec{F}_p\, s$$

      Lo spostamento è uguale all'altezza h quindi

      $$L = mgh$$

      · Per una forza conservativa il lavoro è legato alla variazione di energia potenziale

      $$L_{A \to B} = -\Delta E_{pot} = E_{pot}^A - E_{pot}^B$$

      Visto che la pallina cade sotto l'azione della forza peso, che è una forza conservativa la cui energia potenziale $E_{pot}^{gr} = mg(h - h_o)$

      $$L_{h \to 0} = mg(h - h_o) - mg(0 - h_o) = mgh$$

      Il lavoro compiuto sulla pallina vale:

      $$L = mgh$$

    L'energia cinetica finale della pallina vale:

    $$E_{cin}^{H=0} = mgh$$

La velocità sarà quindi data da:

$$v_{H=0} = \sqrt{\frac{2E_{cin}}{m}} = \sqrt{\frac{2mgh}{m}} = \sqrt{2gh}$$

- Posso considerare la conservazione dell'energia:

$$E_{tot}^{H=h} = E_{tot}^{H=0}$$

  - **Quale è l'espressione dell'energia totale?** L'energia totale meccanica è data dalla somma dell'energia cinetica e delle (varie) energie potenziali.
    In questo caso l'unica forza che agisce è la porza peso quindi devo considerare solo la sua energia potenziale. L'energia totale in questo caso quindi è data da

$$E_{tot} = E_{cin} + E_{pot}^{gr} = \frac{1}{2}mv^2 + mg(h - h_o)$$

  La conservazione dell'energia

$$E_{tot}^{H=h} = E_{tot}^{H=0}$$

  può essere riscritta

$$\frac{1}{2}mv_{H=h}^2 + mg(h - h_o) = \frac{1}{2}mv_{H=0}^2 + mg(0 - h_o)$$

  Visto che $v_{H=h} = 0$

$$\frac{1}{2}mv_{H=0}^2 = mgh$$

  da cui

$$v_{H=0} = \sqrt{2gh}$$

Numericamente

$$v_{H=0} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\,9.8\,m/s^2\,120\,cm} = \sqrt{2\,9.8\,m/s^2\,1.2\,m} = 4.85\,m/s$$

b) **Quale altezza raggiunge dopo il primo rimbalzo?**
Devo calcolare l'altezza raggiunta se rimbalza dopo aver perso il 20% della sua energia.

- **Quanto vale l'energia dopo il primo rimbalzo?** L'energia della pallina sarà

$$E' = E - \Delta E$$

  Il testo dice che ΔE è il 20% di E ossia

$$\Delta E = \frac{20}{100}E$$

  quindi

$$E' = E - \frac{20}{100}E = 0.8E$$

L'energia viene persa solo nel momento in cui tocca terra, mentre risale invece l'energia è conservata.

- Posso considerare la conservazione dell'energia

$$E_{tot}^{H=h'} = E'$$

  l'espressione dell'energia totale è

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 + mg(h - h_o)$$

  Visto che nel punto più' alto $v = 0$

$$mgh_{max} = E_{tot}$$

  da cui

$$h' = \frac{E'}{mg} = 0.8\frac{E}{mg} = 0.8h$$

- Subito dopo il rimbalzo la pallina ha solo energia cinetica: posso calcolare la sua velocità e usare le equazioni del moto uniformemente accelerato per calcolare l'altezza massima
- Posso usare il teorema dell'energia cinetica per calcolare il lavoro che deve compiere la forza peso per fermare la pallina (e da lí risalire allo spazio che deve percorrere in verticale)
- Il lavoro della forza peso può anche essere calcolato usando la variazione della sua energia potenziale.

Il risultato è

$$h' = 0.8h$$

Numericamente:

$$h' = 0.8 \cdot 120\,cm = 96\,cm$$

c) **Quale altezza raggiunge dopo il secondo rimbalzo?**

Dopo il secondo rimbalzo la pallina avrà perso il 20% dell'energia che gli era rimasta dopo il primo rimbalzo:

$$E'' = 0.8E'$$

di conseguenza

$$h'' = 0.8h' = (0.8)^2 h$$

Numericamente:

$$h'' = (0.8)^2 h = 0.64 \cdot 120\,cm = 77\,cm$$