Moto uniformemente accelerato verticale

1 X $\boxed{2-11}$ Una palla viene lanciata verticalmente da terra verso l'alto. A 9,8 m di altezza passa con una velocità di 4,9 m/s. Si calcoli:

(a) la quota massima h a cui giunge la palla;

(b) il tempo τ che la palla impiega per andare dalla quota di 9,8 m alla quota massima;

(c) la velocità $\mathbf{v}'$ e l'accelerazione $\mathbf{a}'$ 0,5 s dopo la partenza;

(d) la velocità $\mathbf{v}''$ e l'accelerazione $\mathbf{a}''$ 2,0 s dopo la partenza.

Si trascuri la resistenza dell'aria.

$\boxed{2-11}$ Sia v_0 la velocità iniziale, $v_1 = 4,9$ m/s e $s_1 = 9,8$ m. Il moto della palla è uniformemente ritardato con accelerazione $-g$. Si ha quindi:

$$v_1^2 - v_0^2 = -2gs_1 \quad ,$$

da cui segue:

$$v_0 = \sqrt{v_1^2 + 2gs_1} = 14,7 \text{ m/s} \quad .$$

(a) La palla raggiunge la quota h con velocità $v_h = 0$ m/s, quindi dalla:

$$v_h^2 - v_0^2 = -2gh$$

segue che:

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(14,7)^2}{2 \cdot 9,8} = 11,03 \text{ m} \quad .$$

(b) Mentre dalla:

$$v_h - v_1 = -g\tau$$

segue che:

$$\tau = \frac{v_1}{g} = \frac{4,9}{9,8} = 0,5 \text{ s} \quad .$$

Usando le formule del moto uniformemente vario e chiamando $\tau' = 0,5$ s e $\tau'' = 2,0$ s, si ottiene:

(c)

$$v' = v_0 - g\tau' = 9,8 \text{ m/s} \quad , \quad a' = -g$$

essendo il moto uniformemente ritardato,

(d)

$$v'' = v_0 - g\tau'' = -4,9 \text{ m/s} \quad , \quad a'' = -g \quad ,$$

essendo v'' negativa, si deduce che la palla sta già scendendo verso il suolo. Infatti la quota massima h viene raggiunta $T = v_0/g = 1,5$ s dopo la partenza.

L'intervallo di tempo fra la percezione di un segnale di arresto (ad esempio un semaforo rosso) e l'applicazione dei freni è, per un automobilista medio, di $0.7\,s$. Se l'automobile può decelerare ad un ritmo di $5\,m/s^2$, calcolare la distanza totale percorsa prima dell'arresto

a) da una velocità iniziale di $36\,km/h$
b) da una velocità iniziale di $72\,km/h$

Soluzione:

a) **Calcolare la distanza totale percorsa prima dell'arresto da una velocità iniziale di** $36\,km/h$

Come distanza totale si intende la distanza percorsa dal momento in cui si accende il segnale di arresto fino al momento in cui l'auto si ferma completamente.

$$d_{arresto} = x(t_{arresto}) - x(t_{segnale})$$

- **Quanto vale** $x(t_{arresto})$**?**

  L'automobile che si muove con velocità v_{in} frena con decelerazione costante a partire dal tempo $t_{reazione}$.

  Si muove quindi di moto unifomemente accelerato.

  Le equazioni del moto per un moto uniformemente accelerato sono

  $$X(t) = X(t_o) + V(t_o)(t - t_o) + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2$$

  quindi nel momento in cui la macchina si ferma si troverà in

  $$x(t_{arresto}) = x(t_{reazione}) + v_{in}(t_{arresto} - t_{reazione}) + \frac{1}{2}a(t_{arresto} - t_{reazione})^2$$

  e la distanza di arresto sarà data da:

  $$d_{arresto} = x(t_{reazione}) - x(t_{segnale}) + v_{in}(t_{arresto} - t_{reazione}) + \frac{1}{2}a(t_{arresto} - t_{reazione})^2$$

  per calcolare distanza percorsa fino al momento in cui la macchina si ferma devo calcolare $x(t_{reazione}) - x(t_{segnale})$ (la distanza percorsa fino al momento in cui comincia a frenare) e $t_{arresto} - t_{reazione}$ (il tempo di frenata).

  - **Quanto vale** $x(t_{reazione}) - x(t_{segnale})$**?**

    Dal momento in cui si accende il segnale ($t_{segnale}$) al momento in cui si comincia a frenare ($t_{reazione}$), la macchina continua a muoversi a velocità costante pari a v_{in}.

    Le equazioni del moto per un moto rettilineo uniforme sono date da:

    $$x(t) = x(t_o) + v(t_o)(t - t_o)$$

    quindi in questo caso

    $$x(t_{reazione}) - x(t_{segnale}) = v_{in}(t_{reazione} - t_{segnale})$$

  - **Quanto vale** $t_{arresto} - t_{reazione}$**?**

    Il tempo di arresto è il momento in cui l'auto si ferma, ossia il valore di t per cui

    $$v(t = t_{arresto}) = 0$$

    Mentre la macchina frena (muovendosi di moto uniformemente accelerato) la sua velocità al tempo t sarà data da:

    $$v(t) = v_o + a(t - t_o)$$

In questo caso particolare (accelerazione negativa a partire da $t_o = t_{reazione}$) $V(t)$ è data da

$$v(t) = v_{in} - a(t - t_{reazione})$$

Quindi

$$v(t = t_{arresto}) = 0 = v_{in} - a(t_{arresto} - t_{reazione})$$

Da cui si ricava:

$$t_{arresto} - t_{reazione} = \frac{v_{in}}{a}$$

Numericamente:

Sostituendo nell'equazione per $d_{arresto}$

$$d_{arresto} = v_{in}(t_{reazione} - t_{segnale}) + v_{in}\frac{v_{in}}{a} - \frac{1}{2}a\frac{v_{iniziale}}{a}^2 = v_{in}(t_{reazione} - t_{segnale}) + \frac{1}{2}\frac{v^2_{iniziale}}{a}$$

Numericamente:

$$\begin{aligned} d_{arresto} = v_{in}(t_{reazione} - t_{segnale}) + \frac{1}{2}\frac{v^2_{iniziale}}{a} &= 36\,km/h * 0.7, s + \frac{1}{2}\frac{(36\,km/h)^2}{(5\,m/s^2)} \\ &= (36\frac{1000\,m}{3600\,s})0.7\,s + \frac{1}{2}\frac{(36\frac{1000\,m}{3600\,s})^2}{(5\,m/s^2)} = 17\,m \end{aligned}$$

b) **Calcolare la distanza totale percorsa prima dell'arresto da una velocità iniziale di $72\,km/h$**

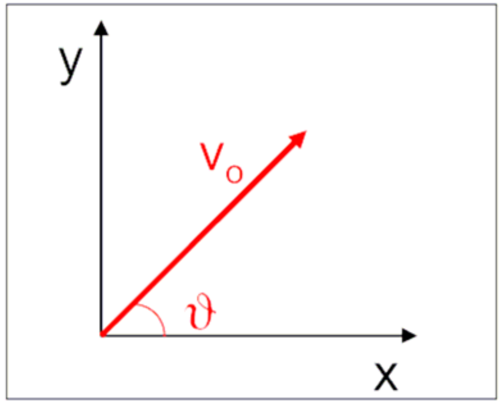
La seconda domanda è una ripetizione della prima, con una diversa velocità iniziale, quindi posso utilizzare la stessa equazione e trovo

$$d'_{arresto} = 54\,m$$

A questo punto osservo che raddoppiando la velocità la distanza di arresto è triplicata.
Analizzando le equazioni che forniscono la soluzione, si nota che mentre la distanza percorsa nel tempo di reazione dipende linearmente dalla velocità quella percorsa durante la frenata dipende dal quadrato della velocità.
Al crescere della velocità il termine lineare è sempre meno importante, e con buona approssimazione lo spazio di arresto risulta proporzionale al quadrato della velocità.

Esercizio – Un cannone spara un proiettile alla velocità di 100 m/s ad un certo angolo con il piano orizzontale. Si calcoli l'angolo che causa la gittata massima e il valore della gittata. Si calcoli inoltre l'angolo necessario per colpire un bersaglio a 500 m di distanza.

Soluzione –



$$\begin{cases} x = vT\cos\vartheta \\ y = vT\sin\vartheta - \frac{1}{2}gT^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = x/(v\cos\vartheta) \\ y = x\tan\vartheta - \frac{1}{2}\dfrac{gx^2}{v^2\cos^2\vartheta}; \end{cases}$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{oppure} \quad x = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\frac{2v^2\cos^2\vartheta}{g} = \frac{2v^2\sin\vartheta\cos\vartheta}{g} = \frac{v^2\sin 2\vartheta}{g};$$

gittata max per $\sin(2\vartheta) = 1 \Rightarrow \vartheta = 45° \Rightarrow y_{max} = v^2/g = 1020$ m;

$d = v^2\sin(2\vartheta)/g \Rightarrow \quad \vartheta = \text{asin}(gd/v^2)/2 = \text{asin}(9.8 \cdot 500/100^2)/2 = \text{asin}(0.49)/2 =$

$= 14° \, 40' \, 13''$ (o $59° \, 40' \, 13''$) [perché 2 sol. ???]

$\boxed{2-18}$ Un vaso di fiori cade da una finestra posta ad un'altezza $H = 15,3$ m dal suolo. Un uomo alto $h = 180$ cm cammina con velocità costante $v = 3,6$ km/h sul marciapiede sottostante. A quale distanza d dalla verticale per la finestra deve trovarsi l'uomo, nel momento in cui il vaso comincia a cadere, per essere colpito in testa? Si trascuri l'attrito dell'aria.

$\boxed{2-18}$ Il vaso si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione $-g$ (prendendo l'asse y diretto verso l'alto) e quindi si ha:

$$y - H = -\frac{1}{2}gt^2 \quad , \tag{1}$$

mentre l'uomo, che si muove di moto uniforme, percorre nel tempo t lo spazio

$$x = vt \quad . \tag{2}$$

La distanza richiesta è (dalla (2)):

$$d = v\tau \quad ,$$

ove τ è il tempo impiegato dal vaso per andare dalla quota H alla quota $y = h$. Esso si ricava immediatamente dalla (1)

$$\tau = \sqrt{2\frac{H-h}{g}} \quad ;$$

e dunque:

$$d = v\sqrt{2\frac{H-h}{g}} = 1,66 \text{ m} \quad .$$

$\boxed{2-20}$ Un proiettile è sparato con un angolo $\theta = 60°$ rispetto all'orizzontale e colpisce un edificio, la cui distanza dal punto di sparo è $d = 24$ m, ad un'altezza $h = 13,4$ m. Si calcoli, trascurando l'attrito dell'aria:

(a) il modulo $|\mathbf{v}_0|$ della velocità iniziale $\mathbf{v}_0$;

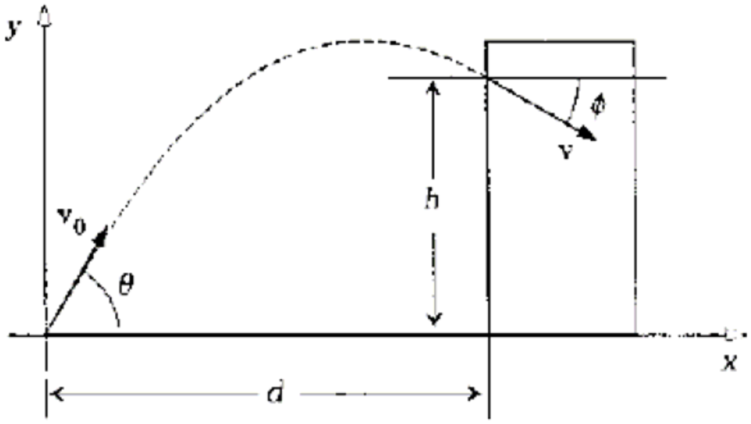
(b) il modulo $|\mathbf{v}|$ e la direzione ϕ della velocità allorché il proiettile colpisce l'edificio.

$\boxed{2-20}$ Le equazioni del moto del proiettile (nel sistema di riferimento scelto) sono:

$$x = v_{0x}t \quad , \tag{1}$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad , \tag{2}$$

con $v_{0x} = v_0 \cos\theta$ e $v_{0y} = v_0 \sin\theta$.



Sia τ il tempo impiegato dal proiettile a raggiungere l'edificio. Allora dalla (1) si ha:

$$\tau = \frac{d}{v_{0x}} \quad ,$$

che, sostituita nella (2) per $y = h$, dà:

$$h = v_{0y}\frac{d}{v_{0x}} - \frac{1}{2}g\frac{d^2}{v_0^2\cos^2\theta} \quad ,$$

cioè:

$$h = d\tan\theta - \frac{1}{2}g\frac{d^2}{v_0^2\cos^2\theta} \quad ,$$

da cui segue:

(a) $$v_0 = \frac{d}{\cos\theta}\sqrt{\frac{g}{2(d\tan\theta - h)}} = 20,02 \text{ m/s} \quad ;$$

il moto lungo l'asse x è uniforme, mentre quello lungo l'asse verticale è uniformemente accelerato; pertanto si ha:

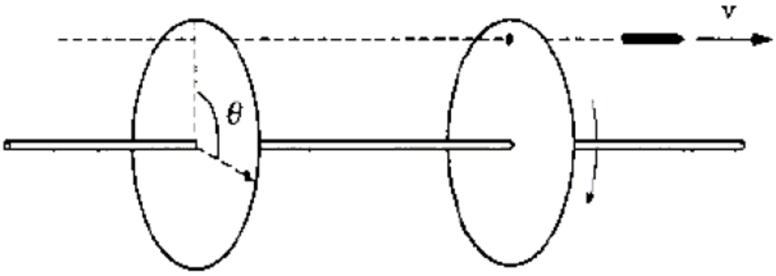
$$v_x(\tau) = v_{0x} \quad ,$$
$$v_y(\tau) = v_{0y} - g\tau \quad .$$

Quindi si ha:

(b) $$v = \sqrt{v_x^2(\tau) + v_y^2(\tau)} = \sqrt{v_0^2\cos^2\theta + (v_0\sin\theta - g\tau)^2} = 11,75 \text{ m/s} \quad ,$$
$$\tan\phi = \frac{v_y(\tau)}{v_x(\tau)} = \frac{v_0\sin\theta - g\tau}{v_0\cos\theta} = -0,6153 \quad ;$$

da cui segue: $\phi = -31°36'$.

$\boxed{2-23}$ Due dischi coassiali distanti $d = 30$ m tra di loro ruotano in sincronismo effettuando n giri al minuto. Un proiettile li attraversa con velocità costante $v = 500$ km/h parallela all'asse di rotazione. Calcolare n se l'angolo tra i due fori è $\theta = 90°$.



$\boxed{2-23}$ La velocità angolare ω con cui ruotano i due dischi è data da:

$$\omega = 2\pi \frac{n}{60} \text{ rad/s} \quad . \tag{1}$$

Il proiettile si muove di moto uniforme con velocità v e percorre la distanza d nel tempo τ dato dalla :

$$\tau = \frac{d}{v} \quad . \tag{2}$$

Contemporaneamente i due dischi ruotano di un angolo $\theta = 90° = \pi/2$ rad collegato ad ω e τ dalla:

$$\omega = \frac{\theta}{\tau} \quad . \tag{3}$$

Dalle (1), (2) e (3) si ha quindi:

$$\frac{\theta}{d} v = \frac{2\pi n}{60} \quad ,$$

da cui segue:

$$n = 30 \frac{\theta v}{\pi d} = \frac{30}{3,14} \cdot \frac{3,14}{2} \cdot \frac{1}{30} \cdot \frac{500 \cdot 10^3}{60} = 4'167 \; giri/\text{minuto} \quad .$$