1. Si calcoli il valore della massa del Sole, supponendo che la Terra compia delle orbite circolari attorno ad esso, conoscendo :
   - il raggio medio dell'orbita terrestre ($1.5 \cdot 10^{11}$ m);
   - il periodo di rivoluzione della Terra attorno al Sole (365 giorni);
   - la costante di gravitazione universale ($6.67 \cdot 10^{11}$ $N \cdot m^2/Kg^2$).

1. Nel moto circolare uniforme, la forza centripeta (nel nostro caso la forza gravitazionale del Sole) è funzione della velocità di rivoluzione v . Pertanto :

[a] $$F = \frac{GmM}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$ ($m = m_{\text{Terra}}$; $M = m_{\text{Sole}}$);

[b] $$vT = 2\pi r$$ (T= 1 anno).

[a] + [b] $$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 \times (1.5 \times 10^{11})^3}{6.67 \times 10^{-11} \times (3600 \times 24 \times 365)^2} = 2.01 \times 10^{30} \text{ Kg.}$$

[Il valore vero della massa del Sole è $M = 1.989 \times 10^{30}\, Kg$, molto simile al nostro calcolo].

La luna ruota con un periodo di 28 giorni attorno alla terra su una traiettoria approssimativamente circolare.

a) Quanto vale la velocità angolare della luna?
b) Quanto vale il raggio medio dell'orbita lunare?
c) Quanto vale la velocità della luna?

$(M_T = 6 \cdot 10^{24}\, kg;\ G = 6.7 \cdot 10^{-11} N\, m^2/kg^2)$

Ris.: $\omega = 2.6 \cdot 10^{-6} rad/s; R_L = 3.9 \cdot 10^8 m;\ v_L = 10^3 m/s$

Soluzione:

a) **Quanto vale la velocità angolare della luna**

La velocità angolare è definita come

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Un moto circolare uniforme ha per definizione velocità angolare costante

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = cost = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

Quindi la velocità angolare della luna vale

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Numericamente

$$\omega = \frac{2\pi}{28\, giorni} = \frac{2\pi}{28\,(24 \cdot 3600\, s)} = 2.6 \cdot 10^{-6} rad/s$$

b) **Quanto vale il raggio medio dell'orbita lunare?**

In un moto circolare uniforme il raggio dell'orbita è legato all'accelerazione centripeta (conseguenza alla forza centripeta) dalla relazione:

$$\vec{a}_c = -\omega^2 \vec{r}$$

nonchè alla velocità periferica dalla relazione:

$$v = \omega r$$

Il problema non fornisce il valore di tali quantità per cui è necessario analizzare se è possibile o meno calcolarle

- **Quanto vale l'accelerazione centripeta?**

  L'accelerazione centripeta è legata alla forza centripeta

  $$F_c = M_L\, a_c$$

  – **Quanto vale la forza centripeta?** La forza centripeta non può che essere data dalla forza di attrazione gravitazionale terra-luna.

    La forza di attrazione gravitazionale terra-lune è data dalla legge di gravitazione universale

    $$F = G\frac{M_T M_L}{R^2}$$

  quindi l'accelerazione centripeta della luna vale:

  $$a_c = G\frac{M_T}{R^2}$$

dall'espressione per l'accelerazione centripeta in termini di velocità angolare si ricava che

$$G\frac{M_T}{R^2} = \omega^2 R$$

da cui

$$R = \sqrt[3]{G\frac{M_T}{\omega^2}}$$

Numericamente

$$R = \sqrt[3]{G\frac{M_T}{\omega^2}} = \sqrt[3]{6.7 \cdot 10^{-11} N\, m^2/kg^2 \frac{6 \cdot 10^{24} kg}{(2.6 \cdot 10^{-6} rad/s)^2}} = 3.9 \cdot 10^8 m$$

c) **Quanto vale la velocità della luna**

La velocità in un moto circolare uniforme è data da:

$$v = \omega r$$

Quindi

$$v = \omega R = 2.6 \cdot 10^{-6} rad/s \cdot 3.9 \cdot 10^8\, m/s = 10^3 m/s$$

Un'automobile di massa $1200\,kg$, partendo da ferma, raggiunge la velocità di $100\,km/h$ in $12\,s$.

a) Quanto valgono l'accelerazione e lo spazio percorso (supponendo che il moto sia uniformente accelerato)?

b) Quanto vale la variazione di energia cinetica? Quanto vale il lavoro compiuto sull'auto?

c) Quanto varrebbe la potenza media sviluppata dal motore (trascurando l'attrito)?

Ris.: $a_m = 2.3\,m/s^2$, $s = 165\,m$; $\Delta E_{cin} = 460\,kJ = L$; $P = 38\,kW$

Soluzione:

a) **Quanto vale l'accelerazione media?**
L'accelerazione media è definita come

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_{fin} - \vec{v}_{in}}{\Delta t}$$

Numericamente

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_{fin} - \vec{v}_{in}}{\Delta t} = \frac{100\,km/h - 0\,km/h}{12\,s} = \frac{100\frac{1000\,m}{3600\,s}}{12\,s} = 2.3\,m/s^2$$

Quanto vale lo spazio percorso?
Lo spazio percorso è definito come

$$S = x(t = 12\,s) - x(t = 0)$$

La posizione di un corpo ad un certo istante è data dalle equazioni del moto.

- **Quali sono le equazioni del moto?** In questo caso il moto è da considerarsi uniformemente accelerato, quindi le equazioni del moto sono date da

$$x(t) = x_o + v_o(t - t_o) + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2$$

In questo caso la velocità iniziale era nulla quindi

$$S = x(t) - x_o = v_o(t - t_o) + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2 = \frac{1}{2}a(t - t_o)^2$$

Numericamente

$$S = \frac{1}{2}a_m(t - t_o)^2 = \frac{1}{2}2.3\,m/s^2(12\,s)^2 = 165\,m$$

b) **Quanto vale la variazione di energia cinetica?**
La variazione di energia cinetica è definita come

$$\Delta E_{cin} = E_{cin}^{fin} - E_{cin}^{in}$$

L'energia cinetica di un corpo è definita come

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv^2$$

quindi

$$\Delta E_{cin} = E_{cin}^{fin} - E_{cin}^{in} = \frac{1}{2}mv_{fin}^2 - \frac{1}{2}mv_{in}^2$$

Numericamente

$$\Delta E_{cin} = \frac{1}{2}mv_{fin}^2 - \frac{1}{2}mv_{in}^2 = \frac{1}{2}1200\,kg \cdot (100\,km/h)^2 = \frac{1}{2}1200\,kg \cdot (100\,\frac{1000\,m}{3600\,s})^2 = 460\,kJ$$

Quanto vale il lavoro compiuto sull'automobile?

- Il lavoro compiuto sull'automobile è definito come

$$L = \int_{x_{in}}^{x_{fin}} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

- Il teorema delle forze vive afferma che il lavoro è legato alla variazione di energia cinetica

$$L = \Delta E_{cin}$$

Entrambe sono applicabili al caso in questione.
Visto che in questo caso la variazione di energia cinetica è stata appena calcolata:

$$L = \Delta E_{cin} = 460\,kJ$$

c) **Quanto vale la potenza media del motore (trascurando gli attriti?)**
La potenza è definita come

$$P = \frac{L_{mot}}{\Delta t}$$

Per calcolare la potenza sviluppata dal motore devo conoscere il lavoro compiuto dal motore. Nell'ipotesi di poter trascurare gli attriti, il lavoro compiuto dalle forze di attrito è nullo, quindi il lavoro compiuto sull'automobile è uguale a quello compiuto dal motore. Quindi la potenza media sarà data da

$$P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{460\,kJ}{12\,s} = 38\,kW$$

(ovviamente nella realtà sarà maggiore...!)

Un uomo di massa $70\,kg$ salta da un'altezza di $1\,m$ con velocità iniziale nulla.
Se cade senza piegare le gambe si ferma in $0.1\,s$, mentre piegando le gambe si arresta in $0.5\,s$.
Calcolare l'accelerazione media e la forza media nei due casi.

<u>*Soluzione:*</u>

a) **Calcolare l'accelerazione media e la forza media esercitata durante l'impatto col terreno**

L'accelerazione media che mi si chiede di calcolare è definita come

$$a_m = \frac{v_f - v_i}{\Delta t}$$

Nel caso specifico (la velocità finale è zero), la velocità "iniziale" è quella che ha prima di toccare terra

$$a_m = -\frac{v_{terra}}{\Delta t}$$

Per rispondere devo calcolare la velocità con cui arriva a terra (e non quella dal momento in cui salta da fermo al momento in cui arriva a terra e si ferma, perche' in quel caso l'accelerazione media è zero!)

- **Calcolare la velocità con cui arriva a terra**

  La velocità con cui arriva a terra è quella acquistata dopo una caduta dall'altezza di $1\,m$.

  Si tratta di un moto di caduta libera di un grave, quindi posso utilizzare le equazioni del moto uniformemente accelerato con accelerazione pari a g

  $$v(t) = v_o + a(t - t_o)$$

  Nel caso specifico (considero l'asse delle coordinate verso il basso)

  $$v(t) = gt$$

  La velocità con cui arriva a terra è quella raggiunta all'istante t_{cad} (tempo impiegato a cadere)

  $$v_{terra} = gt_{cad}$$

  – **Quanto vale il tempo di caduta?**

    Per calcolare il tempo di caduta l'unico dato che ho è che

    $$z_f = z(t_{cad}) = z_o + h = z_o + 1\,m$$

    Posso scrivere l'equazione del moto $z(t)$

    $$z(t) = z_o + v_{oz} + \frac{1}{2}a(t - t_o)^2$$

    Nel nostro caso, con i dati del problema (e con la nostra scelta del sistema di coordinate)

    $$z(t) = z_o + \frac{1}{2}gt^2$$

    Quindi si ricava

    $$t_{cad} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Sostituendo nell'equazione della velocità ottengo

$$v_{terra} = \sqrt{2gh}$$

Avrei potuto ottenere più rapidamente lo stesso risultato osservando che durante il salto l'energia si conserva

$$E_{pot\,g}^{in} + E_{cin}^{in} = E_{pot\,g}^{fin} + E_{cin}^{fin}$$

da cui

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{terra}^2$$

L'accelerazione media nell'impatto col terreno vale quindi:

$$a_m = -\frac{\sqrt{2gh}}{\Delta t} = -\frac{\sqrt{2 \cdot 1\,m \cdot 9.8\,m/s^2}}{0.1\,s} = -44.3\,m/s^2$$

(il segno meno indica che l'accelerazione è diretta verso l'alto)
Mi si chiede inoltre di calcolare la forza media.
La forza è legata all'accelerazione da

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Quindi

$$F_m = ma_m$$

Numericamente

$$F_m = 70\,kg \cdot (-44.3\,m/s^2) = -3100\,N$$

b) **Calcolare le stesse grandezze nel caso in cui, piegando le gambe durante l'impatto col terreno, il tempo di impatto si allunghi fino a $0.5\,s$.**
Dato che la velocità con cui si arriva a terraè la stessa, si tratta di calcolare a_m e F_m usando un diverso valore per Δt Numericamente ottengo:

$$a_m' = -8.85\,m/s^2 \quad F_m' = -620\,N$$

Allungando il tempo di impatto di un fattore 5, sia l'accelerazione media che la forza media esercitate durante l'impatto si sono ridotte proporzionalmente

Esercizio 1. Una grande molla è posta sotto un ascensore di massa 250 Kg, passeggeri compresi. Il suo scopo è quello di arrestare una possibile caduta dell'ascensore da un'altezza massima di 8 m (compressione della molla inclusa), dovuta alla rottura dei cavi. Sapendo che la compressione massima della molla è di 2 m, si calcoli :

a) il valore della costante elastica della molla;
b) l'accelerazione dell'ascensore, quando la molla è a metà della sua compressione massima;
c) la forza (in modulo, direzione e verso) cui è sottoposto un passeggero di massa 70 Kg quando la molla è a metà della sua compressione massima.

Soluzione Si può applicare la conservazione dell'energia meccanica. Pertanto, detta h l'altezza di caduta dell'ascensore, M la sua massa, k la costante elastica della molla e Δ la compressione massima, si ha :

$$Mgh = \frac{1}{2}k\Delta^2 \Rightarrow k = \frac{2Mgh}{\Delta^2} = \frac{2 \times 250 \times 9.8 \times 8}{2^2} = 9800\ N/m \tag{1}$$

La forza subita dall'ascensore, corrispondente ad una compressione δ della molla, è pari alla differenza tra la forza della molla ($= k\delta$, diretta verso l'alto) e la forza di gravità ($= Mg$, diretta verso il basso). Pertanto,

$$F_{asc} = k\delta - Mg \tag{2}$$

L'accelerazione dell'ascensore (e dell'uomo di massa m, che lo occupa) è pertanto pari a

$$a_{asc} = \frac{F_{asc}}{M} = \frac{k\delta}{M} - g = 29.4\ m/s^2 \tag{3}$$

La forza agente sull'uomo è

$$F_{uomo} = m \times a_{uomo} = 2058\ N \tag{4}$$

Poichè il risultato è positivo, la forza della molla prevale sulla forza di gravità, e la forza è diretta dal basso verso l'alto.

1. Un giocatore di golf impugna una mazza di massa M=1.5 Kg ed usa una pallina di massa m=100 g. a) Se la pallina viene colpita da fermo e parte alla velocità di v_0=50 Km/h, ad un angolo θ=30 gradi rispetto al piano orizzontale, a quale distanza dal punto di partenza ricade? b) Supponendo l'urto perfettamente elastico e centrale, quale quantità di moto possiede la mazza un istante prima di colpire la pallina? c) Quale frazione dell'energia cinetica della mazza viene trasferita alla pallina?

Soluzione

a) Occorre calcolare la gittata R della palla tramite la formula:

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \sin\theta \cos\theta = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta)$$

Trasformiamo la velocità in m/s: $v_0 = 50/3.6 \ = \ 13.89 \ m/s$.

$$R = \frac{13.89^2}{9.8} \sin 60^\circ \ = \ 17.05 \ m$$

b) Ricaviamo innanzitutto la velocità della mazza un istante prima dell'urto utilizzando le formule dell'urto elastico unidimensionale su bersaglio fisso. Si conserva la quantità di moto e l'energia cinetica.

$MV_i = MV_f + mv_0$ (conservazione quantità di moto)
$\frac{1}{2}MV_i^2 = \frac{1}{2}MV_f^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$ (conservazione dell'energia cinetica).

Da queste formule si ricava:

$$v_0 = \frac{2M}{m+M}V_i \quad \Rightarrow \quad V_i = \frac{m+M}{2M}v_0 = \frac{0.1+1.5}{3} \cdot 13.89 = 7.41 \ m/s$$

La quantità di moto della mazza prima dell'urto vale:

$$P = MV_i = 1.5 \cdot 7.41 \ = \ 11.1 \ Kg \cdot m/s$$

.

c) Calcoliamo ora la frazione di energia cinetica trasferita dalla mazza alla palla:

$K_m = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.1 \cdot 13.89^2 = 9.65 \ J$ (energia cinetica della palla dopo l'urto).
$K_M = \frac{1}{2}MV_i^2 = \frac{1}{2} \cdot 1.5 \cdot 7.41^2 = 41.2 \ J$ (energia cinetica della mazza prima dell'urto).

$R \ = \ \frac{K_m}{K_M} \ = \ \frac{9.65}{41.2} \ = \ 0.234 \ = \ 23.4\%$.

Da notare che si ha anche: $R \ = \ \frac{4mM}{(m+M)^2} \ = \ \frac{4 \cdot 0.1 \cdot 1.5}{(0.1+1.5)^2} \ = \ 0.234$.

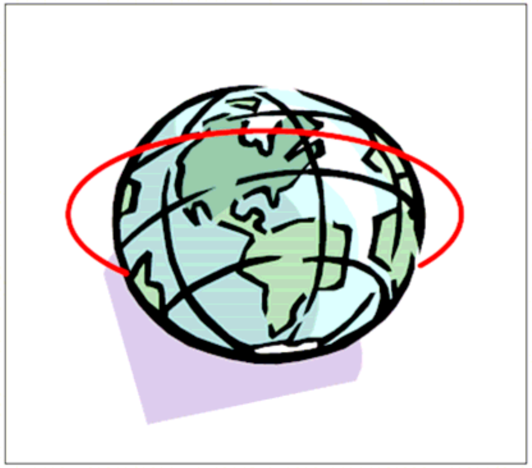
Esercizio – Determinare la velocità di un corpo che, senza usare alcun motore, gira attorno alla Terra ad una quota di 100 m sul livello del mare. Trascurare la resistenza dell'aria e approssimare la Terra con una sfera perfetta di raggio $R_T = 6.37 \times 10^6$ m.

Soluzione –

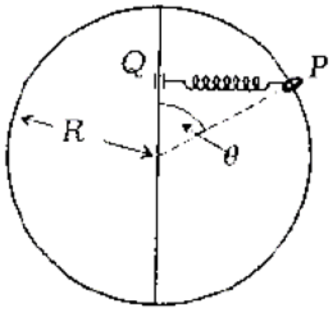
Si eguaglia la forza peso subita dal corpo con la forza centripeta necessaria a compiere il moto in questione :

$$mg = \frac{mv^2}{R} = \frac{mv^2}{R_T + h} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{g(R_T + h)} = \sqrt{9.8 \cdot (6.37 \cdot 10^6 + 10^2)} = 7.9 \cdot 10^3 \ m/s$$



$\boxed{3 - 28}$ Un anello P di massa $m = 0,100$ kg può scorrere lungo una guida circolare priva di attrito di raggio $R = 50,0$ cm posta in un piano verticale. L'anello è soggetto ad una forza elastica orizzontale $|\mathbf{F}|$ che l'attrae verso il diametro verticale (vedi figura). Calcolare i valori della costante di richiamo k della molla e della reazione vincolare $|\mathbf{F}_R|$ esercitata dalla guida sapendo che l'anello è in equilibrio per $\theta = 30°00'$.
[$k = 2,26$ N/m; $F_R = 1,13$ N]



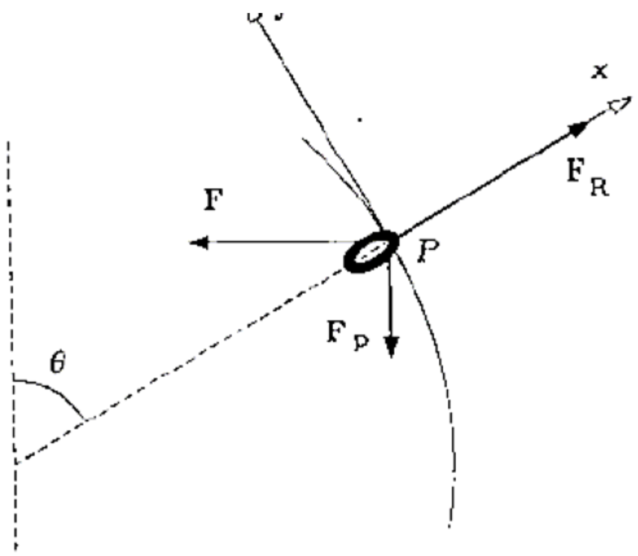
$\boxed{3-28}$ Sull'anello P agiscono la forza peso F_P:

$$F_P = mg \quad ,$$

diretta verticalmente verso il basso; la forza elastica F:

$$F = k\overline{QP} = kR\sin\theta \quad , \qquad (1)$$

diretta verso il diametro verticale; la reazione vincolare $\mathbf{F}_R$ della guida, diretta radialmente. All'equilibrio la risultante delle forze è nulla:



$$\mathbf{F}_P + \mathbf{F} + \mathbf{F}_R = 0 \quad .$$

Scegliendo un sistema di assi cartesiani come in figura si hanno le due relazioni:

$$mg\cos\theta + F\sin\theta = F_R \qquad (2)$$

$$mg\sin\theta = F\cos\theta \quad ; \qquad (3)$$

dalla (3) e dalla (1) si ha:

$$F = mg\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = kR\sin\theta \quad ,$$

da cui:

$$k = \frac{mg}{R\cos\theta} = \frac{0,1\cdot 9,8}{0,5\cos 30^\circ} = 2,26\ \mathsf{N/m} \quad ,$$

e dalla (2):

$$F_R = mg\cos\theta + kR\sin^2\theta = 1,13\ \mathsf{N} \quad .$$