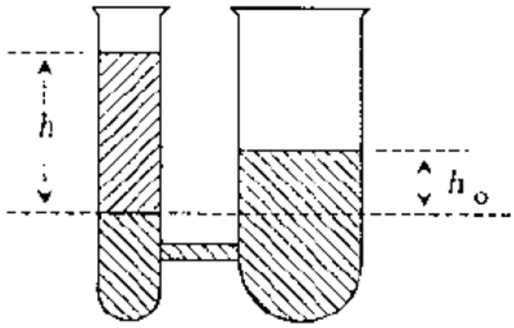
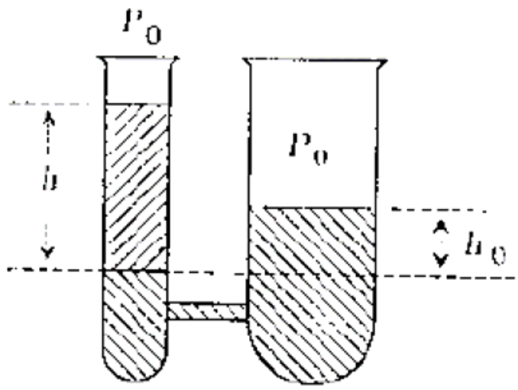
6 − 1 Due provette di sezione $s_1 = 2{,}00\ \text{cm}^2$ e $s_2 = 5{,}00\ \text{cm}^2$ sono collegate fra di loro come in figura. In esse è posto un liquido di densità incognita ρ e del mercurio di densità $\rho_0 = 13{,}6\ \text{g/cm}^3$. I due liquidi non si mescolano. Si calcoli la densità ρ sapendo che l'altezza della colonna del liquido misurata a partire dalla superficie di separazione è $h = 20{,}0$ cm e quella del mercurio è $h_0 = 8{,}00$ cm.
[$\rho = 5{,}44\ \text{g/cm}^3$]



6 − 1 La superficie orizzontale di separazione tra i due liquidi è una superficie equipotenziale, una superficie, cioè, di ugual pressione. Pertanto la differenza di pressione tra questa superficie e le superfici libere, che sono alla pressione atmosferica P_0, è la stessa in entrambe le provette. Quindi, indicando con P la pressione alla superficie di separazione, si ha:



$$P_0 - P = \rho g h \quad , \quad P_0 - P = \rho_0 g\, h_0 \quad ,$$

cioè:

$$\rho\, h = \rho_0\, h_0 \quad ,$$

e quindi:

$$\rho = \rho_0 \frac{h_0}{h} = 13{,}6\ \frac{8}{20} = 5{,}44\ \text{g/cm}^3 \quad .$$

$\boxed{6-4}$ * Un pendolo semplice di lunghezza $l = 2,000$ m e massa $M = 0,2000$ **kg**, è immerso nell'acqua ove compie piccole oscillazioni con un periodo $T = 10,00$ s. Calcolare il volume V occupato dalla massa M. Si trascuri l'attrito con l'acqua.

$\boxed{6-4}$ Sul pendolo agiscono la forza di gravità $M\mathbf{g}$, diretta verticalmente verso il basso, la spinta di Archimede $\rho V\mathbf{g}$ (V è il volume del pendolo di massa M, ρ è la densità dell'acqua), diretta verticalmente verso l'alto e la tensione $\mathbf{R}$ della fune, diretta come la fune.
Le forze peso e la spinta di Archimede hanno una risultante verticale pari a:

$$(M - \rho V)\mathbf{g} \quad ,$$

quindi il pendolo si trova in un campo di accelerazione verticale di valore $a = (M - \rho V)g/M$. Pertanto il periodo del pendolo, che in assenza della spinta di Archimede sarebbe $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$, nel caso in esame è:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{(M - \rho V)g}} \quad ,$$

da cui segue:

$$V = \frac{M}{\rho\, g}\,(g - \frac{4\pi^2 l}{T^2}) \quad ,$$

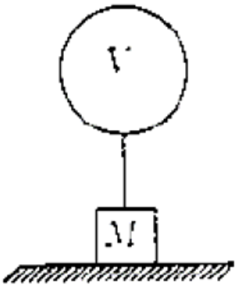
Effettuiamo un controllo dimensionale della formula trovata:

$$[L^3] = \frac{[M]}{[M][L^{-3}][L][T^{-2}]}\,([L][T^{-2}] - [L][T^{-2}]) = \frac{[M][L][T^{-2}]}{[M][L^{-3}][L][T^{-2}]} = [L^3] \quad .$$

Introducendo i valori numerici si ha:

$$V = \frac{200}{1 \cdot 980}\,(980 - \frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot 200}{10^2}) = 183,9 \text{ cm}^3 \quad .$$

$\boxed{6-7}$ Un palloncino di volume $V = 100$ l, riempito di idrogeno, è legato ad una massa M mediante uno spago di massa trascurabile. Qual è il minimo valore di M affinché il palloncino non voli via portandosi dietro la massa stessa? Siano $d_A = 1,20$ g/l la densità dell'aria e $d_H = 0,070$ g/l la densità dell'idrogeno. Si trascuri il peso della gomma del palloncino.
[$M = 113$ g]



$\boxed{6-7}$ Il minimo valore di M è quello per cui la sua forza peso, sommata alla forza peso dell'idrogeno contenuto nel palloncino, sia uguale (e contraria) alla spinta di Archimede:

$$Mg + Vd_H g = Vd_A g \quad ,$$

da cui segue:

$$M = V(d_A - d_H) = 100 \cdot (1,2 - 0,07) = 113 \text{ g} \quad .$$

$\boxed{6-10}$ * In un bidone cilindrico di massa trascurabile, di altezza $L = 1,000$ m e di diametro $d = 80,0$ cm, viene versato del cemento (di densità $\rho_c = 2,700$ kg/dm^3) che lo riempie fino all'altezza $l = 14,00$ cm.
Si calcoli di quanti cm affiora il bidone (vedi figura) se lo si mette a galleggiare in un lago. Qual è il minimo volume V d'acqua che bisogna versare nel bidone perché questo affondi?
[$h = 0,622$ m; $V = 0,313$ m^3]

$\boxed{6-10}$ Affinché il bidone sia in equilibrio occorre che la spinta di Archimede dell'acqua sia uguale alla forza peso del bidone. La spinta di Archimede A è pari a:

$$A = (L-h)S\rho g \quad ,$$

avendo indicato con ρ la densità dell'acqua e con S la sezione del bidone. La forza peso P è data da:

$$P = \rho_c l S g \quad .$$

Quindi, imponendo l'equilibrio delle forze si ottiene:

$$(L-h)S\rho g = \rho_c l S g \quad ,$$

da cui segue:

$$h = L - \frac{\rho_c}{\rho} l = 1 - \frac{2,7 \cdot 10^3 \cdot 0,14}{10^3} = 0,622 \text{ m} \quad .$$

Il minimo volume V di acqua che occore versare nel bidone per farlo affondare è uguale al volume occupato dalla parte emergente del cilindro. Quindi, indicando con $r = d/2$ il raggio del cilindro, si ha:

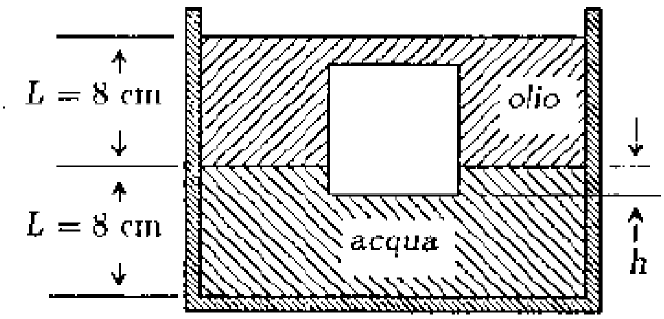
$$V = hS = h\pi r^2 = 0,622 \cdot 3,14 \cdot 0,4^2 = 0,313 \text{ m}^3 \quad .$$

$\boxed{6-12}$ * Un cubo di legno di lato $l = 8,00$ cm galleggia sulla superficie di separazione tra olio ed acqua, come si vede in figura.
Il cubo è immerso nell'acqua per un tratto $h = 2,00$ cm. Calcolare:

(a) la densità ρ del legno sapendo che la densità dell'olio è $\rho_o = 0,850$ g/cm^3;

(b) la pressione idrostatica P agente sulla faccia inferiore del cubo.

[(a) $\rho = 0,85$ g/cm^3; (b) $P = 8,24 \cdot 10^3$ dine/cm^2]



esercizio 6 – 12

$\boxed{6-12}$ Il cubo di legno è in equilibrio sotto l'azione della forza peso e della spinta di Archimede dell'olio e dell'acqua. Pertanto (chiamando $\rho_1 = 1$ g/cm^2 la densità dell'acqua) si ha:

$$\rho\, l^3 = \rho_1 h\, l^2 + \rho_0 (l-h) l^2 \quad ,$$

da cui segue:

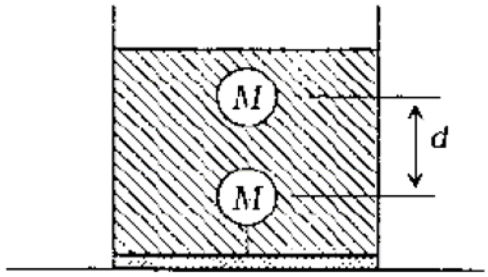
(a) $\rho = \rho_1 \dfrac{h}{l} + \rho_0 \dfrac{l-h}{l} = 1\,\dfrac{2}{8} + 0,8\,\dfrac{6}{8} = 0,85$ g/cm^3

(b) Chiamando L l'altezza dello strato di olio, si ha:

$$P = g(\rho_0 L + \rho_1 h) = 980\,(0,8 \cdot 8 + 1 \cdot 3) = 8,24\ 10^3 \text{ dine/cm}^2 \quad .$$

$\boxed{6-18}$ Un pallone di gomma di massa $M = 400$ g e volume $V = 2{,}360 \cdot 10^{-3}$ m^3 è immerso in un recipiente pieno d'acqua ed è fissato al fondo del recipiente stesso con uno spago.

Se lo spago viene tagliato il pallone sale. Calcolare la velocità $|\mathbf{v}|$ acquistata dal pallone dopo che ha percorso la distanza $d = 1{,}000$ m dentro l'acqua. Si trascuri la viscosità dell'acqua; la densità dell'acqua è $D = 1{,}000$ g/cm^3.
[v = 980 cm/s]



$\boxed{6-18}$ Quando si taglia lo spago il pallone di gomma è soggetto alla forza peso mg, diretta verticalmente verso il basso, ed alla spinta di Archimede DVg, diretta verso l'alto, entrambe applicate al suo baricentro. Applicando la seconda legge di Newton, si ha:

$$DVg - Mg = Ma \quad ,$$

da cui segue che l'accelerazione del pallone è costante e pari a:

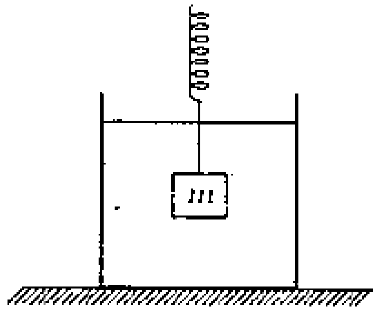
$$a = \frac{DV - M}{M}\,g \quad .$$

Quando il pallone ha percorso lo spazio d la sua velocità v si ottiene dalla:

$$v = \sqrt{2ad} = \sqrt{2\frac{DV - M}{m}gd} =$$

$$= \sqrt{2\,\frac{1 \cdot 2{,}36 \cdot 10^3 - 400}{400}\,980 \cdot 100} = 980 \text{ cm s}^{-1} \quad .$$

$\boxed{6-24}$ * Un corpo di massa $m = 10,0$ g, appeso ad una molla fissata all'altro estremo, l'allunga di un tratto $a = 2,00$ cm. Se il corpo viene immerso in un recipiente pieno d'acqua l'allungamento della molla è $b = 1,00$ cm. Calcolare la densità ρ del corpo.
[$\rho = 2,0$ g/cm^3]



$\boxed{6-24}$ Nel primo caso il corpo è in equilibrio sotto l'azione del suo peso e della forza di richiamo elastica della molla. Si ha cioè:

$$ka = mg \quad . \tag{1}$$

Nel secondo caso sul corpo agisce anche la spinta di Archimede e quindi la nuova condizione di equilibrio è, chiamando $\rho_0 = 1$ g/cm^3 la densità dell'acqua, e V il volume del corpo:

$$kb + \rho_0 V g = mg \quad . \tag{2}$$

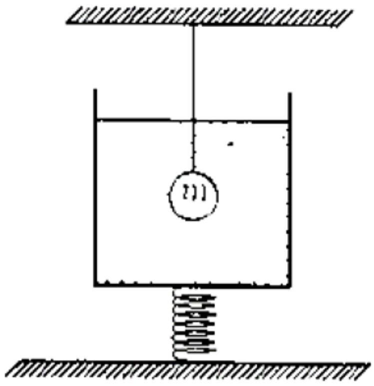
Quindi essendo:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad ,$$

si ha:

$$\rho = m\,\frac{\rho_0 g}{mg - kb} = \frac{m\rho_0 g}{mg - mg\,(b/a)} = \frac{a\rho_0}{a-b} = \frac{2,0\cdot 1,0}{2,0-1,0} = 2,0\,\mathrm{g/cm^3} \quad .$$

6 − 25 * Un recipiente pieno d'acqua di peso complessivo $P = 10,0$ N, posto su di una molla, la comprime di un tratto $a = 5,00$ cm. Se si immerge nell'acqua un oggetto di peso $p = 2,00$ N e volume $V = 100$ cm^3, appeso ad un filo fissato all'altro estremo (vedi figura), si calcoli il tratto b di cui si abbassa ulteriormente la molla.
[$b = 0,495$ cm]



6 − 25 Nel primo caso (vedi figura 1), con il recipiente pieno d'acqua posto sulla molla, si ha:

$$P = ka \quad ,$$

da cui segue:

$$k = \frac{P}{a} \quad . \qquad (1)$$

Nel secondo caso (recipiente più il peso p posti sopra la molla) le forze agenti sul sistema sono (vedi figura 1): la forza di richiamo della molla $F_i = k(a+b)$; la forza peso P del recipiente; la forza peso p dell'oggetto immerso nell'acqua e la tensione T del filo. Tutte le forze agenti hanno la stessa direzione.
In condizioni di equilibrio si ha:

$$F_i + T = P + p \quad . \qquad (2)$$

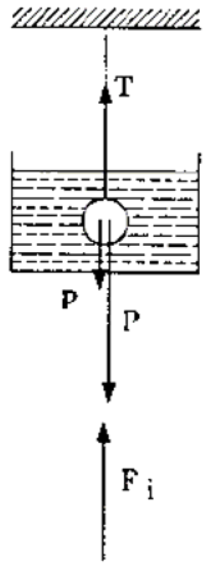


figura 1

D'altra parte, considerando solo l'oggetto di peso p, le forze su di esso agenti sono (vedi figura 2): il suo peso p, la tensione T del filo, la spinta di Archimede A. Per l'equilibrio si ha:

$$T + A = p \quad . \qquad (3)$$

Quindi sostituendo la (3) nella (2), si ottiene:

$$k(a+b) = P + p - T =$$

$$= P + p - p + A = P + A \quad .$$

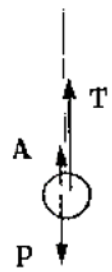


figura 2

E quindi per la (1):

$$b = \frac{P+A}{k} - a = \left(\frac{P+A}{P} - 1\right) a = 0,495 \text{ cm} \quad .$$

Avendo considerato $A = V\rho g = 9,9 \cdot 10^4$ dine e $\rho = 1$ g/cm^3 la densità dell'acqua.

1. Una sfera rigida di volume V = 500 l e densità $\rho = 800\ kg/m^3$ è ancorata sul fondo del mare tramite una molla di costante elastica k. La molla è deformata di 20 cm rispetto alla posizione di riposo.

a) Dire se in queste condizioni la molla è compressa o allungata (giustificando la risposta).

b) Si calcoli la costante elastica della molla (per semplicità si assuma che la densità dell'acqua di mare sia $\rho_a = 1\ g/cm^3$).

c) Successivamente la sfera viene sganciata dalla molla e lasciata libera di muoversi. Sapendo che la resistenza del mezzo può essere rappresentata come una forza pari a $A \cdot v$, dove v è la velocità della sfera e A vale $2 \cdot 10^3\ N \cdot s/m$, trovare la velocità limite che verrà raggiunta dalla sfera.

Soluzione

a) La sfera ancorata tramite la molla è soggetta a tre forze:
1) la forza di gravità diretta verso il basso, pari a: $F_g = \rho \cdot V \cdot g$
2) la spinta di Archimede diretta verso l'alto, pari a: $F_a = \rho_a \cdot V \cdot g$
3) e la forza di richiamo elastica della molla il cui verso sarà tale da controbilanciare le altre due forze e dare una risultante nulla delle forze che agiscono sulla sfera. In questo caso, dato che la densità dell'acqua ($1\ g/cm^3 = 10^3\ kg/m^3$) è superiore alla densità della sfera ($800\ kg/m^3$), la spinta di Archimede prevale ed il corpo tenderebbe a galleggiare. La molla esercita quindi una forza di richiamo verso il basso per mantenere il corpo in equilibrio e risulta pertanto allungata.

b) Numericamente la forza di richiamo della molla vale:

$$F_k = F_a - F_g = (\rho_a - \rho) \cdot V \cdot g = (1000 - 800) \cdot 0.5 \cdot 9.8 = 980\ N$$

(Ricordiamo che 500 l sono uguali a $0.5\ m^3$).

$$k = \frac{F_k}{\Delta x} = 980/0.2 = 4900\ N/m$$

c) Una volta che la sfera viene lasciata libera di muoversi, questa comincerà a spostarsi verso l'alto. Nel suo stato di moto essa subisce la forza dovuta alla resistenza dell'acqua. La forza è diretta in verso opposto a quello del moto ed è proporzionale alla velocità: $F_m = A \cdot v$. Questa forza tende a rallentare il moto della sfera fino a quando la resistenza del mezzo non controbilancia esattamente la risultante delle altre due forze che fanno muovere la sfera, ovvero la forza di gravità e la spinta di Archimede. In queste condizioni la velocità della sfera si stabilizza e si dice che ha raggiunto la velocità limite.

$$A \cdot v_{limite} = F_a - F_g = 980\ N$$

quindi si ha:

$$v_{limite} = \frac{F_a - F_g}{A} = 980/2000 = 0.49\ m/s$$